MATH602 : Correction de la 2e session 2017/2018

Exercice 1.

1. Voir cours.

2. On a bien sûr $\nu(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ deux à deux disjointes. Puisque $\mathbf{1}_{\cup A_n} = \sum \mathbf{1}_{A_n}$ et f est positive, le corollaire pour les séries du théorème de convergence monotone donne immédiatement

$$\nu(\cup A_n) = \int_E \sum_{n\geq 1} f(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 1}\int_E f(x)\mathbf{1}_{A_n}(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geq 1}\nu(A_n),$$

ce qui montre que ν est une mesure positive. Si $\mu(A) = 0$, d'après le théorème de convergence monotone,

$$0 \leq \nu(A) = \int_A f(x)\,\mu(dx) = \sup_{n\geq 1}\int_A \min(f(x), n)\,\mu(dx) \leq \sup_{n\geq 1}(n\mu(A)) = 0.$$

3. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ étant inversible, $(u, v) = \psi(x, y) = (2x + y, x - 3y)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme de $\mathbf{R}^2$. Par ailleurs, $J_\psi(x, y) = -7$. D'après la formule du changement de variable,

$$I = \int_{\mathbf{R}^2} f(u, v)\,dudv = \int_{\mathbf{R}^2} f(\psi(x, y))\,|J_\psi(x, y)|\,dxdy = 7J.$$

Exercice 2. Vérifions les trois points de la définition.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ puisque $\emptyset \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ tribu) et $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Soit $A \in \mathcal{F}$. Alors $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A)(1 - \mu(A)) = 0$. $\mathcal{A}$ étant une tribu, $A^c \in \mathcal{A}$ et d'autre part $\mu(A^c)\,(1 - \mu(A^c)) = (1 - \mu(A))\mu(A) = 0$ ce qui montre que $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Soit $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ étant une tribu, $\cup A_n \in \mathcal{A}$. Deux cas de figure se présentent :
   (a) Il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $\mu(A_p) = 1$. Dans ce cas, $1 = \mu(A_p) \leq \mu(\cup A_n) \leq 1$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mu(A_n) = 0$. Dans ce cas, $0 \leq \mu(\cup A_n) \leq \sum \mu(A_n) = 0$.
   Par conséquent, $\cup A_n \in \mathcal{F}$

Donc $\mathcal{F}$ est une tribu sur E.

Exercice 3. 1. Soit $n \geq 1$. Puisque $|\sin x| \leq \min(1, |x|)$, on a

$$\int_{\mathbf{R}_+^*} |f_n(x)|\,\lambda(dx) \leq \int_{]0,1[} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}\,\lambda(dx) + \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}\,\lambda(dx) < +\infty$$

d'après le critère de Riemann, en 0 pour la 1re intégrale, en l'infini pour la 2e.

2. (a) Pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{\sin x}{2x^2}$. Par ailleurs, pour tout $x \geq 1$, $\sup_{n\geq 1}|f_n(x)| \leq x^{-2}$. Comme $x \longmapsto x^{-2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on obtient, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[1,+\infty[} f_n(x)\,\lambda(dx) = \int_{[1,+\infty[}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\lambda(dx) = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,dx \in \mathbf{R}.$$

(b) Sur $]0, 1[$, les fonctions f_n sont positives. Le lemme de Fatou donne, puisque $\sin x \sim x$ au voisinage de 0,

$$+\infty = \frac{1}{2}\int_{]0,1[}\frac{\sin(x)}{x^2}\,\lambda(dx) = \int_{]0,1[}\liminf f_n(x)\,\lambda(dx) \leq \liminf \int_{]0,1[} f_n(x)\,\lambda(dx).$$

Par conséquent, compte tenu de la question précédente,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{]0,1[} f_n(x)\,\lambda(dx) = +\infty, \quad \text{et,} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}_+^*} f_n(x)\,\lambda(dx) = +\infty.$$

Exercice 4. 1. Pour $t \geq 0$ et $x \in [0,1]$, posons $f(t,x) = \dfrac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$. Nous avons :

— Pour tout $t \geq 0$, $x \longmapsto f(t,x)$ est borélienne sur $[0,1]$ car continue.

— Pour tout $x \in [0,1]$, $t \longmapsto f(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall t \geq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -2te^{-t^2(1+x^2)}.$$

— La fonction $f(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable $[0,1]$ et, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sup_{t\geq 0}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \sup_{t\geq 0} 2te^{-t^2} = \sqrt{2/e} \in \mathrm{L}^1\left([0,1]\right).$$

D'après le théorème de régularité des intégrales à paramètre, F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et,

$$\forall t \geq 0, \qquad F'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx = -2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2x^2}\,dx.$$

2. Puisque $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et, pour tout $t \geq 0$, via le changement de variable $x = tu$,

$$G'(t) = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}\,dx = 2te^{-t^2}\int_0^1 e^{-t^2u^2}\,du = -F'(t), \quad \text{soit} \quad H'(t) = 0.$$

3. (a) On a

$$H(0) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + 0 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Pour tout $t \geq 0$, $0 \leq F(t) \leq e^{-t^2}$; par conséquent, $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$. D'autre part, par convergence monotone ou dominée,

$$\lim_{t\to+\infty} G(t) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

(b) D'après la question précédente, on a

$$\lim_{t\to+\infty} H(t) = \lim_{t\to+\infty} F(t) + \lim_{t\to+\infty} G(t) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Or, d'après la question 2, H est constante sur $\mathbf{R}_+$ égale à $\dfrac{\pi}{4}$. Par conséquent,

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{et,} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. La matrice A étant inversible, $\psi(x) = Ax$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^d$ avec $J_\psi(x) = \det A$ et on a, via $y = Ax$, et le théorème de Tonelli

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{-\|Ax\|^2}\,\lambda_d(dx) = \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-\|y\|^2}\,\lambda_d(y) = \frac{1}{|\det A|}\left(\int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\,du\right)^d = \frac{\pi^{d/2}}{|\det A|}.$$

Exercice 5. 1. Soient $a > 0$ et $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx}e^{-a|x|}\,\lambda(dx) = 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{itx}e^{-ax}\,dx\right) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a-it}\right) = \frac{2a}{a^2+t^2}.$$

2. Soient $a > 0$ et $t \in \mathbf{R}$. La fonction f définie par $f(x,y) = e^{i(y+t)x}e^{-a|x|}e^{-|y|}$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. Comme $|f(x,y)| \leq e^{-a|x|}e^{-|y|}$, f est intégrable sur $\mathbf{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesque. On a alors, d'après le théorème de Fubini et la question précédente,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,\lambda_2(dx,dy) &= \int_{\mathbf{R}}\left(e^{itx}e^{-a|x|}\int_{\mathbf{R}} e^{iyx}e^{-|y|}\,\lambda(dy)\right)\lambda(dx) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx}e^{-a|x|}\frac{2}{1+x^2}\,\lambda(dx),\\ &= \int_{\mathbf{R}}\left(e^{-|y|}\int_{\mathbf{R}} e^{i(y+t)x}e^{-a|x|}\,\lambda(dx)\right)\lambda(dy) = \int_{\mathbf{R}} e^{-|y|}\frac{2a}{a^2+(y+t)^2}\,\lambda(dy).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. (a) On a donc, via $z = (y+t)/a$, on a

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{2a}{a^2 + (y+t)^2} e^{-|y|}\, dy = \int_{\mathbf{R}} \frac{2}{1+z^2} e^{-|az-t|}\, \lambda(dz).$$

(b) Par conséquent, pour $a > 0$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx} e^{-a|x|} \frac{1}{1+x^2}\, \lambda(dx) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+z^2} e^{-|az-t|}\, \lambda(dz).$$

Bien évidemment, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $z \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{e^{itx} e^{-a|x|}}{1+x^2} = \frac{e^{itx}}{1+x^2}, \qquad \lim_{a \to 0^+} \frac{e^{-|az-t|}}{1+z^2} = \frac{e^{-|t|}}{1+z^2}.$$

Par ailleurs,

$$\sup_{a>0} \left| \frac{e^{itx}}{1+x^2} e^{-a|x|} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}, \lambda), \qquad \sup_{a>0} \left| \frac{1}{1+z^2} e^{-|az-t|} \right| \leq \frac{1}{1+z^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}, \lambda).$$

On obtient alors, via théorème de convergence dominée,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, \lambda(dx) = \lim_{a \to 0^+} \int_{\mathbf{R}} e^{itx} e^{-a|x|} \frac{1}{1+x^2}\, \lambda(dx) = \lim_{a \to 0^+} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+z^2} e^{-|az-t|}\, \lambda(dz) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-|t|}}{1+z^2}\, \lambda(dz),$$

et finalement

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, \lambda(dx) = \pi\, e^{-|t|}.$$