Tribus, Fonctions Mesurables

Exercice 1 (Réunion et intersection dénombrables)**.** 1. Déterminer les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right],\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right[,\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[,\quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[k-\frac{1}{n+1},k+\frac{1}{n}\right[.$$

2. Soit (f_n) et f des applications de E dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i\geqslant k}^{\infty}\left\{x\in E,\ |f_i(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{n}\right\}.$$

Exercice 2. Soient X un ensemble non vide et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X. On définit

$$\limsup A_n=\bigcap_{n}\bigcup_{k\geqslant n}A_k,\qquad \text{et,}\qquad \liminf A_n=\bigcup_{n}\bigcap_{k\geqslant n}A_k.$$

1. Montrer que $\liminf A_n\subset\limsup A_n$.
2. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les exemples suivants :
   - la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
   - la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
   - $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_{2n}=A$ et $A_{2n+1}=B$ où $A\subset X$, $B\subset X$;
   - $X=\mathbb{R}$ et pour tout n, $A_n=\left[2+(-1)^{n+1},3+\frac{1}{n+1}\right]$.

Exercice 3 (Points de discontinuité d'une fonction croissante)**.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que f admet des limites à gauche $\lim\limits_{y\to x^-}f(y)$ et à droite $\lim\limits_{y\to x^+}f(y)$ finies en tout point.

2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Indication : considérer, pour $n\geqslant 1$, les ensembles $A_n=\left\{x\in[-n;n]\ ;\ \lim\limits_{y\to x^+}f(y)-\lim\limits_{y\to x^-}f(y)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$.

Exercice 4 (Limite supérieure de suites)**.** Soient (a_n) et (b_n) des suites de $\mathbb{R}$ minorées par une constante. Montrer que $\limsup(a_n+b_n)\leqslant\limsup a_n+\limsup b_n$. Donner un exemple de suites bornées pour lesquelles l'inégalité ci-dessus est stricte. Que dire de $\limsup(a_n-b_n)$?

Exercice 5 (Ensemble de convergence)**.** Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$A=\{x\in E,\ \text{la suite }(f_n(x))_n\text{ est convergente}\}$$

est un élément de $\mathcal{A}$. Indication : $\mathbb{R}$ est c-----t ou alors lim sup

Exercice 6. Donner un exemple de suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n, A_n est (de cardinal) infini et $\cap_n A_n=\emptyset$.

Exercice 7 (Image et image réciproque)**.** Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F.

1. Montrer que pour toute partie Y de F, on a $f^{-1}(Y^c)=(f^{-1}(Y))^c$. Donner des exemples d'applications $f:E\to F$ et de partie X de E telles que

$$(i)\ f(X^c)\subset f(X)^c,\quad (ii)\ f(X^c)\supset f(X)^c,\quad (iii)\ \text{aucune inclusion n'est satisfaite.}$$

2. Soient $(X_i)_{i\in I}$ (resp. $(Y_i)_{i\in I}$) une famille de partie de E (resp. F). Montrer que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i), \quad f\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(Y_i).$$

Montrer également que

$$f\left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(Y_i).$$

et que cette dernière inclusion est en général stricte et qu'il y a égalité si f est injective.

Exercice 8 (Fonction indicatrice)**.** Soit E un ensemble, A,B, $(A_i)_{i\in I}$ des parties de E.

1. Déterminer $\mathbf{1}_\emptyset$, $\mathbf{1}_E$ et calculer $\mathbf{1}_A^{-1}(J)$ pour $J \subset \mathbb{R}$.
2. Montrer que

$$(i)\ A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B \text{ et } A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \quad (ii)\ \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B \text{ et } \mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A,$$

$$(iii)\ \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B, \quad (iv)\ \mathbf{1}_{A\Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|.$$

3. Montrer que $\mathbf{1}_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$ et $\mathbf{1}_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$.

Exercice 9 (Exemples de tribu)**.** Si $A \subset \mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble $\{-a\ ;\ a \in A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ ;\ A = -A\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que la tribu image-réciproque est $\mathcal{A}$.
3. Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Exercice 10 (Tribu trace)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $B \subset E$. Montrer que $\mathcal{A}_B = \{B \cap A\ ;\ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur B rendant l'injection canonique mesurable. Montrer que si $B \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_B = \{A \in \mathcal{A};\ A \subset B\}$.

Exercice 11 (Tribu produit engendrée)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On suppose que $\mathcal{A}$ est engendrée par $\mathcal{E}$ ($\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$) et $\mathcal{B}$ est engendrée par $\mathcal{F}$ ($\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$). On suppose de plus que $E \in \mathcal{E}$ et $F \in \mathcal{F}$. Montrer que la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sur $E \times F$ est engendrée par les ensembles qui s'écrivent $A \times B$ avec $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 12. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et f, g des applications mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ muni de la tribu borélienne. On souhaite montrer que les ensembles suivants appartiennent à $\mathcal{A}$:

$$A = \{x \in E,\ f(x) < g(x)\}, \quad B = \{x \in E,\ f(x) \leqslant g(x)\}, \quad C = \{x \in E,\ f(x) = g(x)\}.$$

1. Montrer que $A = A = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x \in E\ ;\ f(x) < q < g(x)\}$. En déduire que la tribu $\mathcal{A}$ contient A.
2. En déduire que B et C appartiennent également à $\mathcal{A}$.

Exercice 13. Montrer que la fonction suivante est discontinue sur $\mathbb{Q}$ est continue sur $\mathbb{Q}^c$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 1/q & \text{si } x = p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \text{ premiers entre eux}, \\ 0 & \text{si } x \text{ irrationnel}. \end{cases}$$

Exercice 14 (Algèbre des fonctions étagées)**.** Montrer que l'ensemble des fonctions étagées de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est une algèbre. On écrira notamment la stablilité par addition et multiplication.