Mesures positives

Dans toute la suite $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Exercice 1. On rappelle que, si $(x_k)_{k\geqslant 0} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, $\sum_{k\geqslant 0} x_k = \sup_{n\geqslant 0} \sum_{0\leqslant k\leqslant n} x_k$.

Soit $(a_{k,l})_{k\geqslant 0, l\geqslant 0} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que $\sum_{k\geqslant 0} \sum_{l\geqslant 0} a_{k,l} = \sum_{l\geqslant 0} \sum_{k\geqslant 0} a_{k,l}$.

Exercice 2. Soient $(\mu_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de mesures positives sur $(E, \mathcal{A})$ et $(\alpha_k)_{k\geqslant 0} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. On pose

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mu(A) = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k \, \mu_k(A).$$

Montrer que μ est une mesure positive sur $(E, \mathcal{A})$. On pourra commencer par une somme finie si besoin. Lorsque, pour tout k, μ_k est une mesure de probabilité, à quelle condition μ est-elle encore une probabilité ?

Exercice 3. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère les mesures positives $\mu = \delta_0 + 2\,\delta_1$ et $\nu = 2\,\delta_0 + \delta_1$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $m(A) = \sup(\mu(A), \nu(A))$. m est-elle une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$?

Exercice 4. Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(]0, +\infty[) > 0$. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs $a < b$ tels que $\mu([a, b]) > 0$.

Exercice 5. 1. Soit $(\mu_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de mesures positives sur $(E, \mathcal{A})$ telle que, pour $A \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\mu_k(A) \leqslant \mu_{k+1}(A)$. Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(A) = \sup_{k\geqslant 0} \mu_k(A)$. Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

2. Sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on définit, pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{N}$,

$$\nu_j(A) = \operatorname{card}(A \cap [j, +\infty[) \quad \text{si } A \text{ est fini}, \qquad \nu_j(A) = +\infty \quad \text{sinon.}$$

(a) Montrer que, pour tout j, ν_j est une mesure positive et que, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\nu_j(A) \geqslant \nu_{j+1}(A)$.

(b) On pose, pour $A \subset \mathbb{N}$, $\nu(A) = \inf_{j\geqslant 0} \nu_j(A)$. Calculer $\nu(\mathbb{N})$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $\nu(\{k\})$. ν est-elle une mesure positive ?

Exercice 6. Soit μ une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{A})$. Montrer que

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$$

est une tribu sur E.

Exercice 7. On considère les mesures $\mu = \sum_{k\geqslant 1} \delta_{1/k}$ et $\nu = \sum_{k\geqslant 1} 2^{-k}\, \delta_{1/k}$.

1. Montrer que ν est une mesure de probabilité et calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\nu(] - \infty, t])$.
2. Montrer que μ est σ-finie. Calculer, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu(]0, \varepsilon[)$.

Exercice 8. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que, pour tous $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Exercice 9. Soit μ une application de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. pour tous $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ disjoints, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
3. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0} \subset \mathcal{A}$, croissante pour l'inclusion ($A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n),

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

Exercice 10. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$, $(G, \mathcal{C})$ deux espaces mesurables, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions mesurables. Montrer que $(g \circ f)_*(\mu) = f_*(g_*(\mu))$.

Exercice 11. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : E \longrightarrow F$ une application. On pose

$$f_*(\mathcal{A}) = \left\{B \subset F : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}.$$

1. Montrer que $f_*(\mathcal{A})$ est une tribu sur F. f est-elle mesurable par rapport à $\mathcal{A}$ et $f_*(\mathcal{A})$?

2. On suppose que f est mesurable par rapport à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Peut-on comparer $\mathcal{B}$ et $f_*(\mathcal{A})$?

3. En terme de taille, comment qualifieriez-vous la tribu $f_*(\mathcal{A})$? Sur quelle tribu, vous semble-t-il pertinent de définir $f_*(\mu)$?

Exercice 12. Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact K. On désigne par A l'ensemble des atomes de μ c'est à dire

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\} > 0\}.$$

1. Montrer que

$$A = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{x \in [-n, n] : \mu(\{x\} \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

En remarquant que A_n est fini, en déduire que A est au plus dénombrable.

2. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $\mu_a(B) = \mu(A \cap B)$. Montrer que μ_a est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ puis que

$$\mu_a = \sum_{x\in A} \mu(\{x\})\, \delta_x.$$

3. Montrer que μ peut s'écrire $\mu_a + \mu_d$ où la mesure μ_d n'a aucun atome.

Exercice 13. Soit μ une mesure borélienne sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i.e. $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact K. On considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$G(x) = -\mu(]x, 0]) \quad \text{si } x < 0, \qquad G(0) = 0, \qquad G(x) = \mu(]0, x]) \quad \text{si } x > 0.$$

1. Montrer que G est croissante, continue à droite et possède en tout point une limite à gauche.

2. Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\})$ en fonction de G. À quelle condition G est-elle continue au point x ?

3. On suppose que μ est bornée et on pose $F(x) = \mu(] - \infty, x])$. Quelle relation relie F et G ? Préciser $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

Exercice 14. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Déterminer $\mu = f_*(\lambda)$ où $f(x) = |x|$.

Exercice 15. Soit μ la mesure de Lebesgue-Stieltjes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ associé à la fonction croissante

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < 0, \qquad F(x) = x \quad \text{si } 0 \leqslant x < 1, \qquad F(x) = 1 \quad \text{si } x \geqslant 1.$$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 \min(x, 1 - x)$. Déterminer $f_*(\mu)$.

Exercice 16. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(x + B) = \mu(B)$ où $x + B = \{x + b : b \in B\}$. On suppose que $\mu([0, 1]) = 1$.

1. On note $\alpha = \mu(\{0\})$. Montrer que $n\alpha = \mu(\{1/k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$. En déduire que $\alpha = 0$ et que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout réel x.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu\left(]0, \frac{1}{n}]\right) = \frac{1}{n}$. En déduire que, pour tous rationnels $q < r$, $\mu(]q, r]) = r-q$.

3. En déduire que pour tous réels $a < b$, $\mu(]a, b[) = \mu([a, b]) = b - a$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 17. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère

$$\mathcal{A}_\mu = \{B \cup N : B \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}, \qquad \text{où } \mathcal{N}_\mu = \{N \subset E : \exists A \in \mathcal{A},\ N \subset A, \mu(A) = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}_\mu$ est une tribu sur E qui contient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}_\mu$. En déduire que $\mathcal{A}_\mu = \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu)$.

2. Si $A \in \mathcal{A}_\mu$, on pose $\nu(A) = \mu(B)$ où $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$. Montrer que ν est bien définie (indépendante de l'écriture $A = B \cup N$) et que ν est une mesure sur $(E, \mathcal{A}_\mu)$ vérifiant $\nu(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

3. Montrer que $\mathcal{A}_\mu$ contient tous les ensembles ν-négligeagles c'est à dire si $X \subset A \in \mathcal{A}_\mu$ avec $\nu(A) = 0$ alors $X \in \mathcal{A}_\mu$.