Mesures positives

Exercice 6. Vérifions les trois points de la définition.

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$ puisque $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \in \mathcal{T}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$ et comme $\mu(E) = 1$, $\mu(A^c) = \mu(E\backslash A) = \mu(E) - \mu(A) = 1 - \mu(A)$ qui vaut 0 ou 1 suivant que $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$.
3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Deux cas de figure se présentent :
   (a) Pour tout n, $\mu(A_n) = 0$. Dans ce cas,
   $$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n) = 0 \ ;$$
   (b) Il existe $p \in \mathbb{N}$, $\mu(A_p) \neq 0$. Comme $A_p \in \mathcal{T}$, $\mu(A_p) = 1$. On a alors, puisque $A_p \subset \bigcup A_n$,
   $$1 = \mu(A_p) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \mu(E) = 1.$$
   Par conséquent, $\mu\left(\bigcup A_n\right) = 1$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Exercice 7. On considère les mesures $\mu = \sum_{k\geq 1} \delta_{1/k}$ et $\nu = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\delta_{1/k}$.
1. D'après le cours, on sait que ν est une mesure (cf. exercice 2). Il suffit de vérifier que $\nu(\mathbb{R}) = 1$. On a

$$\nu(\mathbb{R}) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\delta_{1/k}(\mathbb{R}) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Soit t un réel. On a

$$F_\nu(t) = \nu(]-\infty,t]) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\delta_{1/k}(]-\infty,t]) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\mathbf{1}_{]-\infty,t]}(1/k).$$

De manière évidente, si $t \leq 0$, $F_\nu(t) = 0$ et, si $t \geq 1$, $F_\nu(t) = \nu(\mathbb{R}) = 1$. Si $0 < t < 1$, il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/(p+1) \leq t < 1/p$ ($p < 1/t \leq p+1$) et

$$F_\nu(t) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\mathbf{1}_{]-\infty,t]}(1/k) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\mathbf{1}_{k\geq 1/t} = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\mathbf{1}_{k\geq p+1} = \sum_{k>p} 2^{-k} = 2^{-p} = 2^{-[(1/t)-]}.$$

$F_\nu(t) = 1/2$ sur $[1/2,1[$, $F_\nu(t) = 1/4$ sur $[1/3,1/2[$, $F_\nu(t) = 1/8$ sur $[1/4,1/3[$, etc.
2. Notons $A = \{1/k : k \geq 1\}$, $A_0 = A^c$ et, pour $n \geq 1$, $A_n = \{1/n\}$. On a $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ et

$$\mu(A_0) = 0, \qquad \mu(A_n) = 1, \quad n \geq 1.$$

Donc μ est σ-finie. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers k tels que $1/k < \varepsilon$ et donc

$$\mu(]0,\varepsilon[) = \sum_{k\geq 1} \delta_{1/k}(]0,\varepsilon[) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{]0,\varepsilon[}(1/k) = +\infty.$$

Exercice 14. Soient $a < b$ deux réels. Calculons $\mu(]a,b])$. On a

$$\mu(]a,b]) = \lambda\left(f^{-1}(]a,b])\right) = \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : a < |x| \leq b\}\right).$$

Si $b < 0$, $\mu(]a,b]) = \lambda(\emptyset) = 0$. Pour $b \geq 0$, si $a < 0$,

$$\mu(]a,b]) = \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq b\}\right) = \lambda([-b,b]) = 2b,$$

et si $a \geq 0$,

$$\mu(]a,b]) = \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : a < |x| \leq b\}\right) = \lambda([-b,-a[\cup]a,b]) = 2(b-a).$$

Finalement, pour tous $a < b$, $\mu(]a,b]) = G(b) - G(a)$ avec $G(x) = 2x^+ = 2\max(x,0)$. La mesure μ est égale à la mesure de Lebesque-Stieltjes associée à $G(x) = 2\max(x,0)$ sur tous les intervalles $]a,b]$. D'après le théorème d'égalité de deux mesures, μ est la mesure de Lebesque-Stieltjes associée à $G(x) = 2\max(x,0)$.

Exercice 17. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère

$$\mathcal{A}_\mu = \{B \cup N : B \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}, \quad \text{où } \mathcal{N}_\mu = \{N \subset E : \exists A \in \mathcal{A},\ N \subset A, \mu(A) = 0\}.$$

1. Vérifions les trois points de la définition.

   1. $\emptyset \in \mathcal{A}_\mu$ puisque $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ et $\emptyset \in \mathcal{A} \cap \mathcal{N}_\mu$.

   2. Soit $A \in \mathcal{A}_\mu$: $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$. Puisque $N \in \mathcal{N}_\mu$, il existe $X \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset X$ et $\mu(X) = 0$. On a alors, puisque $X^c \subset N^c$,

   $$A^c = B^c \cap N^c = (B^c \cap N^c \cap X^c) \bigcup (B^c \cap N^c \cap X) = (B^c \cap X^c) \bigcup (B^c \cap N^c \cap X)\,.$$

   Ceci montre que $A^c \in \mathcal{A}_\mu$ puisque $B^c \cap X^c \in \mathcal{A}$ (une tribu est stable par passage au complémentaire et par intersection finie) et $B^c \cap N^c \cap X \in \mathcal{N}_\mu$ car $B^c \cap N^c \cap X \subset X$ et $X \in \mathcal{A}$ avec $\mu(X) = 0$.

   3. Soit $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{A}_\mu$. Pour tout $n \geq 0$, $A_n = B_n \cup N_n$ avec $B_n \in \mathcal{A}$ et $N_n \in \mathcal{N}_\mu$. Par définition de $\mathcal{N}_\mu$, pour tout entier n, il existe $X_n \in \mathcal{A}$ tel que $N_n \subset X_n$ et $\mu(X_n) = 0$. On a alors

   $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cup N_n) = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\Big)\,.$$

   Une tribu étant stable par union dénombrable $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$. Montrons que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_\mu$. En effet, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable et $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(X_n) = 0$. Par conséquent, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_\mu$.

On a $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$ car, si $A \in \mathcal{A}$, on peut écrire $A = A \cup \emptyset$ ($B = A \in \mathcal{A}$, $N = \emptyset \in \mathcal{N}_\mu$). De même, $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}_\mu$ puisque si $Y \in \mathcal{N}_\mu$, $Y = \emptyset \cup Y$ ($B = \emptyset \in \mathcal{A}$, $N = Y \in \mathcal{N}_\mu$).

$\mathcal{A}_\mu$ est une tribu qui contient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}_\mu$. Par conséquent, elle contient la plus petite des tribus contenant ces deux classes de parties : $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu) \subset \mathcal{A}_\mu$. Réciproquement, une tribu étant stable par union finie, si $B \in \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu)$ et $N \in \mathcal{N}_\mu \subset \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu)$, alors $B \cup N \in \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu)$. Finalement, $\mathcal{A}_\mu = \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu)$.

2. Pour $A \in \mathcal{A}_\mu$, on pose $\nu(A) = \mu(B)$ lorsque $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$. Montrons que l'application ν est bien définie. Soit $A \in \mathcal{A}_\mu$. Supposons que $A = B \cup N$ et $A = B' \cup N'$ avec B et B' dans $\mathcal{A}$, N et N' dans $\mathcal{N}_\mu$. Montrons que nécessairement $\mu(B) = \mu(B')$. Comme N et N' appartiennent à $\mathcal{N}_\mu$, il existe X et X' dans $\mathcal{A}$ tels que $N \subset X$, $N' \subset X'$ et $\mu(X) = \mu(X') = 0$. On a alors,

$$B \subset A = B \cup N = B' \cup N' \subset B' \cup X', \quad \mu(B) \leq \mu(B' \cup X') \leq \mu(B') + \mu(X') = \mu(B'),$$
$$B' \subset A = B' \cup N' = B \cup N \subset B \cup X, \quad \mu(B') \leq \mu(B \cup X) \leq \mu(B) + \mu(X) = \mu(B).$$

L'application ν est donc bien définie. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, puisque $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$, écrivant $A = A \cup \emptyset$ ($B = A$, $N = \emptyset$), on a par construction, $\nu(A) = \mu(A)$. En particulier, $\nu(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathcal{A}_\mu$ deux à deux disjointes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = B_n \cup N_n$ avec $B_n \in \mathcal{A}$ et $N_n \in \mathcal{N}_\mu$. Comme déjà remarqué, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\big) \bigcup \big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\big)$ avec $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_\nu$. Comme $B_k \cap B_l \subset A_k \cap A_l$, les parties $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjointes et, par définition de ν,

$$\nu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n).$$

ν est donc une mesure positive sur $\mathcal{A}_\mu$ qui coïncide avec μ sur $\mathcal{A}$.

3. Soient $A \in \mathcal{A}_\mu$ tel que $\nu(A) = 0$ et $X \subset A$. Montrons que $X \in \mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}_\mu$. En effet, $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$. Puisque $\nu(A) = 0$, on a $\mu(B) = 0$. Par ailleurs, comme $N \in \mathcal{N}_\mu$, il existe $Y \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$. On a donc $X \subset B \cup Y \in \mathcal{A}$ avec $\mu(B \cup Y) \leq \mu(B) + \mu(Y) = 0$. Donc $X \in \mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}_\mu$.