Intégrale de Lebesgue

Dans toute la suite $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Exercice 1. Soient $(\mu_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de mesures positives sur $(E, \mathcal{A})$.

1. On considère la mesure positive μ définie par

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mu(A) = \sum_{k\geqslant 0} \mu_k(A).$$

Montrer que, pour tout fonction $f \in \mathcal{M}_+$,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{k\geqslant 0} \int_E f(x)\,\mu_k(dx).$$

On pourra utiliser la méthode usuelle : $f = \mathbf{1}_A$ puis $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$.

Comment se traduit ce résultat lorsque $\mu = \sum_{k\geqslant 0} p_k\,\delta_{x_k}$?

2. On suppose la suite $(\mu_k)_{k\geqslant 0}$ croissante et on considère la mesure positive

$$\mu(A) = \sup_{k\geqslant 0} \mu_k(A), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{M}_+, \qquad \int_E f(x)\,\mu(dx) = \sup_{k\geqslant 0} \int_E f(x)\,\mu_k(dx).$$

Exercice 2. Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable.

1. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \min(f(x), n)\,\mu(dx) = \int_E f(x)\,\mu(dx).$$

2. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\mathbf{1}_{\{x\in E : f(x)<n\}}(x)\,\mu(dx).$$

En déduire que, lorsque f est μ-intégrable, $\lim_{n\to\infty} n\mu\left(\{x \in E : f(x) \geqslant n\}\right) = 0$.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables et positives.

1. On suppose que $\int_E f_0(x)\,\mu(dx) < \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mu(dx) = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mu(dx).$$

2. Montrer que ce résultat peut être faux si $\int_E f_0(x)\,\mu(dx) = +\infty$.
3. Quel résultat retrouve-t-on si $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$ avec $A_n \in \mathcal{A}$ et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante ?

Exercice 4. Pour $n \geqslant 1$, on considère la fonction

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x).$$

1. Pour tout $x \geqslant 0$, déterminer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
2. Pour $0 \leqslant x < n$, soit $g_n(x) = \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$. Montrer que g_n est positive sur $[0, n[$. En déduire que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
3. Soient $0 < p < 1$ et $\mu = \sum_{k\geqslant 1} p(1-p)^{k-1}\,\delta_k$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,\mu(dx).$$

Exercice 5. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue et non bornée telle que

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,\lambda(dx) < +\infty.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, nulle presque partout pour la mesure de Lebesgue. Montrer que f est nulle.

Exercice 7. 1. Soit f la fonction définie sur $[\pi, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge mais que f n'est pas Lebesgue intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

2. Soient $T > 0$ et u une fonction continue et T-périodique. Montrer que $f(x) = u(x)/x$ est Lebesgue intégrable sur $[T, +\infty[$ si et seulement si u est nulle.

Exercice 8. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geqslant 0} \frac{2n+k}{n+k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^4 \frac{nx\cos^2(x)}{1+nx^2+\sqrt{n}e^x}\,dx = +\infty.$$

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \sum_{n\geqslant 0} \int_E f(x)\mathbf{1}_{\{n\leqslant f<n+1\}}(x)\,\mu(dx).$$

En déduire que

$$\sum_{n\geqslant 0} n\mu\left(\{x\in E : n \leqslant f(x) < n+1\}\right) \leqslant \int_E f(x)\,\mu(dx) \leqslant \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\mu\left(\{x\in E : n \leqslant f(x) < n+1\}\right),$$

puis que

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) < +\infty \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\geqslant 1} \mu\left(\{x\in E : f(x) \geqslant n\}\right) < +\infty,$$

et que, lorsque μ est finie,

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) < +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n\geqslant 0} \mu\left(\{x\in E : f(x) \geqslant n\}\right) < +\infty.$$

Exercice 10. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu\left(\left\{x\in E : 2^n \leqslant |f(x)| < 2^{n+1}\right\}\right) < +\infty.$$

En considérant la fonction $x \longmapsto x^{-\alpha}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$, retrouver le critère de Riemann.

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$.

1. On suppose que f est bornée. Montrer que

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f(x)\,\mu(dx) = 0.$$

2. Montrer que le résultat est encore vrai si on ne suppose plus f bornée. On pourra penser à $f_n = \min(n, f)$.