Théorème de convergence dominée et applications

Dans toute la suite $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Exercice 1. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leqslant n\}} |f|^2 d\mu < +\infty.$$

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. Dans chacun des exemples suivants, déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$:

$$U_n = \sum_{k \geqslant 0} \frac{n}{nk^2 + k + 1}, \qquad U_n = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2n} \frac{n^2}{in^2 + i^2}, \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1} \right)^n.$$

Exercice 3. Dans chacun des exemples suivants, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \tanh(x/n) dx, \qquad I_n = \int_0^\infty \frac{n \exp(-x)}{nx+1} dx, \qquad I_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin u}{u^2} \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}} \lambda(du),$$

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{n} \left(1 + \frac{t}{n}\right) \exp(-\frac{t}{n})\, dt, \qquad I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi(1 + |t|^{2+\frac{1}{n}})},$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{e^{2x} - 1}$ est intégrable sur $]0, \infty[$.

Établir la relation

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^{2x} - 1}\, dx = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{1 + 4n^2}.$$

On pourra d'abord démontrer que, si $x > 0$, $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} e^{-2nx} \sin x$.

Exercice 5. Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable et $(A_n)_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{A}$ une partition de E. Montrer que

$$\int_E f(x)\, \mu(dx) = \sum_{n \geqslant 1} \int_{A_n} f(x)\, \mu(dx).$$

Calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à la mesure de Lebesgue de $f(x) = \dfrac{1}{[x]!} \mathbf{1}_{x>0}$.

Exercice 6. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa somme S.
2. Calculer, puis expliquer les résultats,

$$\int_0^\infty S(x)\, dx, \qquad \sum_{n \geqslant 1} \int_0^\infty u_n(x)\, dx.$$

Exercice 7. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 e^{-tx}\, dx, \quad t \geqslant 0.$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer F'' et déterminer les limites de $F(t)$ et $F'(t)$ quand $t \to +\infty$.
3. En déduire une expression simple de F.

Exercice 8. Soit γ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que, pour tout réel β, $x \longmapsto \exp(\beta x)$ est γ-intégrable.

1. Montrer que γ est finie ?
2. Montrer que, pour tout réel β et tout $p > 0$, $x \longmapsto \exp(\beta|x|)$ et $x \longmapsto \exp(\beta|x|)|x|^p$ sont γ-intégrables.
3. Montrer que, pour tout complexe z, $x \longmapsto \exp(zx)$ est γ-intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(zx)\,\gamma(dx) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n\,\gamma(dx).$$

4. Soit la fonction réelle F définie par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(tx)}{1 - t\cos(x)}\,\gamma(dx).$$

   (a) Montrer que F est continue sur $]-1,1[$.

   (b) Montrer que F est dérivable sur $]-1,1[$ et donner une expression de F'. F est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$?

   (c) On suppose que γ a pour densité $x \longmapsto e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que, si $t \notin]-1,1[$, $F(t)$ n'est pas définie.

Exercice 9. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et μ une mesure bornée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\,dx, \qquad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx).$$

1. Montrer que $\widehat{f}$ et $\widehat{\mu}$ sont uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $x \longmapsto xf(x)$ est intégrable alors $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Que faut-il supposer pour $\widehat{\mu}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$?
3. Calculer $\widehat{f}$ et $\widehat{\mu}$ dans les cas suivants :

$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x \geqslant 0}, \qquad \mu = (\delta_{-1} + \delta_1)/2, \qquad \mu = \sum_{k \geqslant 0} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}\,\delta_k,\ \alpha > 0.$$

4. L'objectif est de calculer $\widehat{f}$, notée g dans cette question, lorsque $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   (a) Montrer que g est réelle et paire.

   (b) Soit $(g_n)_{n \geqslant 1}$ la suite de fonctions définies par

$$g_n(t) = \int_{-n}^{n} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx, \quad n \geqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que g_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que (g_n') converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

   (c) En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall t > 0, \qquad g'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{iu}{t^2 + u^2}\,e^{iu}\,du.$$

   (d) En déduire que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $g''(t) = g(t)$ pour tout $t > 0$.

   (e) Calculer $g(0)$ et $\lim_{t \to \infty} g(t)$. En déduire que, pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \pi\,e^{-|t|}$.

Exercice 10. Préciser le domaine de définition de la fonction

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Montrer que B est $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.