Mesures produit

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur l'espace produit $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ par $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}([0,1])$-mesurable.
2. Calculer $\displaystyle\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\, dx \right) dy$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\, dy \right) dx$. Conclure.

Exercice 2.

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx$ est bien définie et qu'elle vaut encore
$$I = -2 \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\, dx.$$
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dx\, dy}{(1+y)(1+x^2y)}$ et en déduire la valeur de I.
3. Déduire de la question précédente et d'un développement en série entière de $1/(1-x^2)$ les égalités
$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{puis} \quad \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f et g deux fonctions mesurables positives sur $(E, \mathcal{A})$.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}_+ \ ;\ f(x) \geqslant t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_E f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \geqslant t\}) \lambda(dt)$.
3. En déduire que, pour tout $p \geqslant 1$, $\displaystyle\int_E g^p\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1} \mu(\{g \geqslant t\}) \lambda(dt)$.
4. Que dire de $\displaystyle\int_E \varphi \circ f\, d\mu$ si φ est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0 ?
5. En considérant l'application de $E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $F : (x,s,t) \mapsto \mathbf{1}_{[s,+\infty[}(f(x)) \mathbf{1}_{[t,+\infty[}(g(x))$, montrer que
$$\int_E fg\, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mu(\{f \geqslant s\} \cap \{g \geqslant t\}) \lambda(ds) \lambda(dt).$$

Exercice 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est L.I. sur $\mathbb{R}^2$ et calculer, si elles existent les intégrales itérées $\displaystyle\int_I \int_I f(x,y) \lambda(dx)\, \lambda(dy)$ et $\displaystyle\int_I \int_I f(x,y) \lambda(dy)\, \lambda(dx)$.

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{avec} \quad I = [0,1] \quad \text{et} \quad f(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \text{ et } 0 < y - x \leqslant 1, \\ 2 & \text{si } x > 0 \text{ et } 1 < y - x \leqslant 2, \\ -1 & \text{si } x > 0 \text{ et } 2 < y - x \leqslant 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{avec} \quad I = \mathbb{R}.$$

Exercice 5. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 e^{-tx}\, dx.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et g sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f(t)$ pour tout $t > 0$ en partant de l'égalité $\dfrac{\sin x}{x} = \displaystyle\int_0^1 \cos(xy)\, dy$.
3. Calculer $g(t)$ pour tout $t > 0$ en partant de l'égalité $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x}\, dy$.
4. En déduire la valeur de $g(0)$.

Exercice 6. Une formule d'intégration par parties généralisée

1. Soit μ et ν des mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On désigne par F et G leurs fonctions de répartition respectives ; c'est-à-dire que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \mu(]-\infty, x]) \quad \text{et} \quad G(x) = \nu(]-\infty, x]).$$
Pour des réels fixés a et b, avec $a < b$, on définit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a < y \leqslant x \leqslant b\}$. En calculant de deux façons différentes $\mu \otimes \nu(A)$, montrer que
$$\int_{]a,b]} F(t^-)\, \nu(dt) + \int_{]a,b]} G(t)\, \mu(dt) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$
2. Soit f et g sont des fonctions positives, λ-intégrables sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f\, d\lambda, \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{-\infty}^x g\, d\lambda.$$
Montrer que F et G sont les fonctions de répartition de deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. En déduire que
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b, \quad \int_{[a,b]} F(x)g(x)\, \lambda(dx) + \int_{[a,b]} f(x)G(x)\, \lambda(dx) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, g étant bornée. On définit le produit de convolution de f et g notée $f * g$ sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\, dy.$$

1. Montrer que $f * g$ est bien définie et que $f * g = g * f$. Montrer que $f * g$ est bornée et intégrable.
2. Montrer que si f et g sont positives et d'intégrale 1 (pour λ), il en est de même pour $f * g$.
3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} (f * g)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx \int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(x)\, dx.$$
4. On ne suppose plus que g est bornée (f et g sont intégrables). Montrer que $(x, y) \longmapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que $f * g$ est définie presque partout et intégrable.