Changements de variable

Exercice 1. La fonction $x \longmapsto \sin(\|x\|)\,\|x\|^{-3}e^{-\|x\|}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^2$? sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2. Le passage en coordonnées polaires.

1. Montrer pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

2. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, démontrer en utilisant le changement de variables en dimension deux $(x_1,x_2) = (y\cos\theta, y\sin\theta)$ que

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = \int_{\mathbb{R}}\left(\iint_{y>0,|\theta|<\pi} f(y\cos\theta, y\sin\theta, x)ydyd\theta\right)dx,$$

puis en utilisant un nouveau changement en dimension deux $(x,y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ que

$$I = \int_0^{+\infty}\iint_{|\theta|<\pi,\ 0<\phi<\pi} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)\sin\phi\ d\theta\ d\phi\ r^2dr.$$

On pose, par exemple pour g continue sur $\mathbf{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$,

$$\int_{\mathbf{S}^2} g(\omega)d\sigma_2(\omega) = \iint_{|\theta|<\pi,\ 0<\phi<\pi} g(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\sin\phi\ d\theta\ d\phi.$$

Montrer que pour $f \in C_c(\mathbb{R}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^2} f(r\omega)d\sigma_2(\omega)r^2dr.$$

3. Soit n un entier ≥ 2 et $F \in C_c(\mathbb{R}^{n+1})$. On suppose définie l'intégrale d'une fonction continue sur la sphère $\mathbf{S}^{n-1}$ et démontrée la formule (pour $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(r\omega)d\sigma_{n-1}(\omega)r^{n-1}dr.$$

Montrer que

$$J = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})dx_1\cdots dx_ndx_{n+1} = \int_{\mathbb{R}}\int_{\omega\in\mathbf{S}^{n-1},y>0} F(y\omega,x)d\sigma_{n-1}(\omega)y^{n-1}dydx,$$

puis en utilisant un nouveau changement en dimension deux $(x,y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ que

$$J = \int_0^{+\infty}\iint_{\omega\in\mathbf{S}^{n-1},\ 0<\phi<\pi} F(r\omega\sin\phi, r\cos\phi)(\sin\phi)^{n-1}\ d\sigma_{n-1}(\omega)\,d\phi\,r^ndr.$$

Pour g continue sur la sphère $\mathbf{S}^n$, on pose

$$\int_{\mathbf{S}^n} g(\Omega)d\sigma_n(\Omega) = \int_{0<\phi<\pi}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} g(\omega\sin\phi, \cos\phi)(\sin\phi)^{n-1}\ d\sigma_{n-1}(\omega)\ d\phi.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^n} F(r\Omega)d\sigma_n(\Omega)r^ndr.$$

Exercice 3 (Fonctions Γ et B)**.** 1. Rappeler le domaine de définition des fonctions Γ et B suivantes :

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, \quad \text{et}, \qquad B(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

2. Soient $a > 0$, $b > 0$. Montrer que

$$\int_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)} x^{a-1} y^{b-1} dx dy = B(a,b)\Gamma(a+b).$$

En déduire que $\Gamma(a)\Gamma(b) = \mathrm{B}(a,b)\Gamma(a+b)$, (`indic.` $u = x+y$, $v = \frac{x}{x+y}$), puis que, pour $\alpha \in]0,1[$, on a

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt.$$

3. Soient p, q, r, s des réels strictement positifs. Calculer, en fonction de B, l'intégrale

$$J = \int_D x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} (1-x-y-z)^{s-1} dx dy dz,$$

où $D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x+y+z < 1\big\}$. En déduire une expression de J en fonction de Γ. (`Indic.` $u = x+y+z$, $v = \frac{y+z}{x+y+z}$, $w = \frac{z}{y+z}$).

4. Montrer que pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, puis que $\Gamma(n) = (n-1)!$ Que vaut J si p, q, r, s sont des entiers ?

Exercice 4. Soit A une matrice réelle $m \times m$, symétrique et définie positive (*i.e.* $\langle Ax, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$). On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

1. Soit B une matrice réelle $m \times m$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{-\langle Ax, x\rangle\big\}\, dx = \sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}},$$

puis que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx, x\rangle \exp\big\{-\langle Ax, x\rangle\big\}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}} \operatorname{trace}(BA^{-1}).$$

(`Indic.` Utiliser une base orthonormale de vecteurs propres de A pour faire un changement de variables).

2. (a) Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2}\, dx$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle : $2y' + ty = 0$. En déduire F.

   (b) Pour $y \in \mathbb{R}^m$, calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y, x\rangle\big\} \exp\big\{-\langle Ax, x\rangle\big\}\, dx$.