Changements de variable

Exercice 1. Nous avons, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\sin(\|x\|)|\, \|x\|^{-3} e^{-\|x\|}\, \lambda_d(dx) = dV_d \int_0^{+\infty} |\sin(t)| t^{-3} t^{d-1} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} \frac{1}{t^{3-d}}\, e^{-t}\, dt.$$

D'après le critère de Riemann au voisinage de 0, cette dernière intégrale est finie si et seulement si $3 - d < 1$ c'est à dire $d > 2$. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^3$ mais pas sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Notons Δ la demi–droite $\mathbb{R}_-$ soit $\{(x,y)\ ;\ x \le 0,\ y = 0\}$. Une droite, ici une demi–droite, étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue en dimension deux on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2\setminus\Delta} f(x,y)dxdy.$$

Or la fonction Λ définie par $\Lambda(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de l'ouvert $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ qui est ouvert. En effet, Λ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) et l'on a de plus si $(r,\theta) \in]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$,

$$\mathrm{J}\Lambda(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0.$$

De plus Λ est injective sur $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$ car si $(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r'\cos\theta', r'\sin\theta')$ on a

$$r^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = (r'\cos\theta')^2 + (r'\sin\theta')^2 = r'^2$$

et donc $r = r'$ puisque r et r' sont positifs. Il s'en suit ($r > 0$) que $(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta', \sin\theta')$ qui implique que $\theta \equiv \theta'$ mod. 2π et donc que $\theta = \theta'$ comme $\theta,\ \theta' \in]-\pi,\pi[$. D'où l'injectivité de Λ sur $]0,\infty[\times]-\pi,\pi[$.

On montre facilement que $\Lambda\big(]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\big) = \mathbb{R}^2\setminus\Delta$. Remarquons que l'on peut déterminer la fonction réciproque de Λ, via les formules, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\Delta$, $\Lambda^{-1}(x,y) = (r,\theta)$ avec

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{et}, \quad \theta = 2\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

On obtient à l'aide de la formule de changement de variables, pour φ $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme sur l'ouvert U, $\displaystyle\int_{\varphi(U)} f(x)dx = \int_U f\circ\varphi(y)|\mathrm{J}\varphi(y)|dy$,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2\setminus\Delta} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$. On a d'après le théorème de Fubini

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = \int_{\mathbb{R}} \left(\iint_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2 \right) dx_3,$$

et d'après la question précédente, comme pour presque tout x_3, $(x_1,x_2) \longmapsto f(x_1,x_2,x_3)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\iint_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2 = \iint_{y>0, |\theta|<\pi} f(y\cos\theta, y\sin\theta, x_3) y dy d\theta, \quad p.p.$$

on a

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\iint_{y>0,|\theta|<\pi} f(y\cos\theta, y\sin\theta, x_3) y dy d\theta \right) dx_3.$$

Finalement, posant $(x_3, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi) = \Lambda(r,\phi)$ et notant que l'image de $]0,\infty[\times]0,\pi[$ par ce difféomorphisme est $\Lambda\big(]0,\infty[\times]0,\pi[\big) = \mathbb{R}\times]0,\infty[$, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty}\iint_{|\theta|<\pi,\ 0<\phi<\pi} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)\sin\phi\, d\theta\, d\phi\, r^2 dr.$$

Si maintenant $f \in C_c(\mathbb{R}^3)$, on a, par définition de l'intégrale sur la sphère $\mathbf{S}^2$ par rapport à σ_2 et d'après le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^2} f(r\omega)d\sigma_2(\omega)r^2 dr.$$

3. Soit n un entier ≥ 2 et $F \in C_c(\mathbb{R}^{n+1})$. Via le théorème de Fubini, on a :

$$J = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})dx_1\cdots dx_n dx_{n+1} = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{x}, x_{n+1})d\tilde{x}\right)dx_{n+1},$$

et d'après l'hypothèse de récurrence $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(r\omega)d\sigma_{n-1}(\omega)r^{n-1}dr$ il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\tilde{x}, x_{n+1})d\tilde{x} = \int_{\omega\in\mathbf{S}^{n-1}, y>0} F(y\omega, x_{n+1})d\sigma_{n-1}(\omega)y^{n-1}dy,$$

puis

$$J = \int_{x_{n+1}\in\mathbb{R}}\int_{\omega\in\mathbf{S}^{n-1}, y>0} F(y\omega, x_{n+1})d\sigma_{n-1}(\omega)y^{n-1}dy\, dx_{n+1}.$$

Utilisant à nouveau le changement de variables $(x_{n+1}, y) = \Lambda(r,\phi)$ comme à la question précédente, il vient

$$J = \int_0^{+\infty}\iint_{\omega\in\mathbf{S}^{n-1},\ 0<\phi<\pi} F(r\omega\sin\phi, r\cos\phi)(\sin\phi)^{n-1}\ d\sigma_{n-1}(\omega)\, d\phi\, r^n dr.$$

Avec la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur $\mathbf{S}^n$,

$$\int_{\mathbf{S}^n} g(\Omega)d\sigma_n(\Omega) = \int_{0<\phi<\pi}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} g(\omega\sin\phi, \cos\phi)(\sin\phi)^{n-1}\, d\sigma_{n-1}(\omega)\, d\phi$$

il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x)dx = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{S}^n} F(r\Omega)d\sigma_n(\Omega)r^n dr.$$

Remarque. Il suffit de combiner les questions 2 et 3 de cet exercice pour montrer, par récurrence sur la dimension de l'espace, la formule générale du passage en coordonnées polaires. On retrouve bien évidemment le critère d'intégrabilité pour les fonctions du type $f(\|x\|)$ à l'aide de la mesure image par l'application norme euclidienne de la mesure de Lebesgue en dimension n qui est la mesure sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ de densité $t \longmapsto nV_n t^{n-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ où V_n désigne le volume de la boule unité. En particulier, il faut retenir le critère de Riemann généralisé, à savoir :

$$\frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathbf{1}_{\|x\|\leq 1} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^n \iff \alpha < n \quad \text{et} \quad \frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathbf{1}_{\|x\|\geq 1} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^n \iff \alpha > n.$$

Exercice 3. 1. C'est le critère de Riemann en 0 qui fournit immédiatement le domaine de définition des fonctions Γ et B ; $\Gamma(a)$ est définie pour $a > 0$ et $\mathrm{B}(a,b)$ est définie pour $a > 0$, $b > 0$.

2. Fixons $a > 0$, $b > 0$ et notons pour la suite de cette question

$$I = \int_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}dxdy.$$

Introduisons la fonction $\Phi :]0,\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x,y) = \left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)$ et montrons que Φ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme sur $]0,\infty[^2$. Il est clair que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0,\infty[^2$ de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit de vérifier que Φ est injective sur $]0,\infty[^2$ et que $\mathrm{J}\Phi(x,y)\neq 0$ si $(x,y)\in]0,\infty[^2$. Si $\Phi(x,y)=\Phi(x',y')$ on a $x+y=x'+y'$ et $\frac{x}{x+y}=\frac{x'}{x'+y'}$ d'où l'on déduit immédiatement $x=x'$ puis $y=y'$. D'autre part, on a

$$\mathrm{J}\Phi(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & \dfrac{-x}{(x+y)^2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{x+y},$$

qui est bien sûr non nul sur $]0,\infty[^2$. Il en résulte que Φ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de $]0,\infty[^2$ sur $\Phi\big(]0,\infty[^2\big)$ que nous devons déterminer. Si x et y sont strictement positifs on a $x<x+y$ de sorte que $\Phi\big(]0,\infty[^2\big)\subset\,]0,\infty[\times]0,1[$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $(u,v)\in]0,\infty[\times]0,1[$ et cherchons $(x,y)\in]0,\infty[^2$ tel que $\Phi(x,y)=\Big(x+y,\frac{x}{x+y}\Big)=(u,v)$; on obtient facilement que $(x,y):=(uv,u(1-v))$ appartient à $]0,\infty[^2$ et satisfait à $\Phi(x,y)=(u,v)$. (On vient d'inverser Φ). D'où $\Phi\big(]0,\infty[^2\big)=]0,\infty[\times]0,1[$.

On calcule I – la fonction à intégrer est positive – à l'aide du changement de variables $(u,v)=\Phi(x,y)$. Pour cela on exprime $e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}/|\mathrm{J}\Phi(x,y)|$ en fonction des nouvelles coordonnées, soit

$$\frac{e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}}{\big|\mathrm{J}\Phi(x,y)\big|}=e^{-u}\big(uv\big)^{a-1}\big(u(1-v)\big)^{b-1}u=e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}.$$

Finalement, on obtient

$$I=\int_{]0,\infty[\times]0,1[}e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}dudv$$

qui donne l'égalité à l'aide du théorème de Tonelli–Fubini – on a deux intégrales à variables séparées –,

$$I=\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b).$$

Si à présent $\alpha\in]0,1[$ la formule précédente donne $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=B(\alpha,1-\alpha)$ car $\Gamma(1)=1$. Il suffit alors faire le changement de variables $y=\frac{1}{x}-1$ dans $B(\alpha,1-\alpha)$ pour obtenir le résultat.

3. On va calculer J (tout est positif ici !) à l'aide du changement de variables défini par la formule $(u,v,w)=\Psi(x,y,z)$ où $\Psi:D\longrightarrow\mathbb{R}^3$ est définie par $\Psi(x,y,z)=\Big(x+y+z,\frac{y+z}{x+y+z},\frac{z}{y+z}\Big)$. Des calculs similaires à ceux de la question précédente montrent que Ψ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de D sur $]0,1[^3$. En effet, l'injectivité se démontre "en cascade" et l'on a, pour $(x,y,z)\in D$,

$$\mathrm{J}\Psi(x,y,z)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \dfrac{-(y+z)}{(x+y+z)^2} & \dfrac{x}{(x+y+z)^2} & \dfrac{x}{(x+y+z)^2}\\ 0 & \dfrac{-z}{(y+z)^2} & \dfrac{y}{(y+z)^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{(x+y+z)(y+z)}\neq 0.$$

Finalement déterminer $\Psi(D)$ se ramène plus ou moins à déterminer la fonction réciproque de Ψ, soit $\Psi^{-1}(u,v,w)=\big(u(1-v),uv(1-w),uvw\big)$, ce qui n'est pas très difficile. Remarquant qu'en fonction des nouvelles coordonnées (u,v,w),

$$\frac{x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}}{\big|\mathrm{J}\Psi(x,y,z)\big|}=u^{p+q+r-1}(1-u)^{s-1}v^{q+r-1}(1-v)^{p-1}w^{r-1}(1-w)^{q-1},$$

le changement de variables défini par Ψ conduit à

$$J=\mathrm{B}(p+q+r,s)\mathrm{B}(q+r,p)\mathrm{B}(r,q),$$

et prenant en compte le résultat de la question précédente on obtient également

$$J=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}.$$

4. Fixons $x>0$ et calculons $\Gamma(x+1)$ à l'aide d'une intégration par parties :

$$\Gamma(x+1)=\int_{]0,\infty[}e^{-t}t^x dt=\Big[-e^{-t}t^x\Big]_0^{\infty}+\int_{]0,\infty[}e^{-t}xt^{x-1}dt=0+x\Gamma(x).$$

Comme $\Gamma(1) = 1 = 0!$, on obtient par récurrence, à l'aide de la relation précédente, pour tout entier non nul n, $\Gamma(n) = (n-1)!$ et on obtient alors, dans le cas où p, q, r, s sont des entiers non nuls, l'expression suivante pour J :

$$J = \frac{(p-1)!\,(q-1)!\,(r-1)!\,(s-1)!}{(p+q+r+s-1)!}.$$

Exercice 4. 1. La matrice A étant symétrique et définie positive il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A. Notons Ω la matrice orthogonale formée par ces vecteurs propres. On a $A = \Omega D\,{}^t\Omega$ où D est la matrice diagonale formée des valeurs propres de A, notées α_i, qui sont strictement positives.

Notons tout d'abord que les deux intégrales à calculer existent : les fonctions à intégrer sont continues sur $\mathbb{R}^m$ donc mesurables et on a la majoration :

$$\Big(1 + \big|\langle Bx, x\rangle\big|\Big) \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\} \le C\big(1 + \|x\|^2\big) \exp\{-\alpha_{\min}\|x\|^2\}. \tag{$\sharp$}$$

Pour le calcul de la première intégrale on a :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\}\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{ -\langle \Omega D\,{}^t\Omega x, x\rangle\big\}\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{ -\langle D\,{}^t\Omega x, {}^t\Omega x\rangle\big\}\,dx,$$

et effectuant le changement de variables $y = {}^t\Omega x$, on obtient, comme $|\det\Omega| = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\}\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{ -\langle Dy, y\rangle\big\}|\det\Omega|\,dy = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\Big\{ -\sum_{i=1}^m \alpha_i y_i^2\Big\}\,dy.$$

La dernière intégrale est à variables séparées ; il vient facilement, utilisant le changement de variables $t_i = \sqrt{\alpha_i}\,y_i$ dans chacune d'elles, comme $\det A = \prod_{i=1}^m \alpha_i$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\}\,dx = \prod_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \exp\{-\alpha_i y_i^2\}\,dy_i = \prod_{i=1}^m \sqrt{\frac{1}{\alpha_i}} \int_{\mathbb{R}} \exp\{-t_i^2\}\,dt_i = \sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}}.$$

Le calcul de la seconde intégrale se conduit de la même façon. En effet, via le changement de variables $y = {}^t\Omega x$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx, x\rangle \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\}\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \langle {}^t\Omega B\Omega y, y\rangle \exp\big\{ -\langle Dy, y\rangle\big\}\,dy,$$

ce qui sous une forme développée donne

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx, x\rangle \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\}\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{k,l=1}^m \big({}^t\Omega B\Omega\big)_{k,l}\, y_l y_k \prod_{i=1}^m \exp\{-\alpha_i y_i^2\}\,dy.$$

D'autre part, comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} y\exp\{-\alpha y^2\}\,dy = 0$, les termes croisés s'annulent dans la somme précédente et on a en fait

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx, x\rangle \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\}\,dx = \sum_{k=1}^m \big({}^t\Omega B\Omega\big)_{k,k} \int_{\mathbb{R}^m} y_k^2 \prod_{i=1}^m \exp\{-\alpha_i y_i^2\}\,dy,$$

et posant $t_i = \sqrt{\alpha_i}\,y_i$ il vient, comme $\det A = \prod_{i=1}^m \alpha_i$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx, x\rangle \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \sum_{k=1}^m \big({}^t\Omega B\Omega\big)_{k,k}\alpha_k^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} t_k^2 \prod_{i=1}^m \exp\{-t_i^2\}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{\pi^{m-1}}}{\sqrt{\det A}} \sum_{k=1}^m \big({}^t\Omega B\Omega\big)_{k,k}\alpha_k^{-1} \int_{\mathbb{R}} t^2 \exp\{-t^2\}\,dt.
\end{aligned}$$

Finalement une intégration par parties montre que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^2 \exp\{-t^2\}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et il reste à remarquer que $\sum_{k=1}^m \big({}^t\Omega B\Omega\big)_{k,k}\alpha_k^{-1} = \mathrm{trace}\big({}^t\Omega B\Omega D^{-1}\big) = \mathrm{trace}\big(B\Omega D^{-1}\,{}^t\Omega\big) = \mathrm{trace}\big(BA^{-1}\big)$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx, x\rangle \exp\big\{ -\langle Ax, x\rangle\big\}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}}\mathrm{trace}(BA^{-1}).$$

2. (a) Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

- Pour tout t, l'application $x \longmapsto e^{itx}e^{-x^2}$ est continue et de plus $\sup_{t\in\mathbb{R}} |e^{itx}e^{-x^2}| = e^{-x^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. F est donc définie sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto e^{itx}e^{-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $ixe^{itx}e^{-x^2}$.
- On a de plus $\sup_{t\in\mathbb{R}} |ixe^{itx}e^{-x^2}| = |x|e^{-x^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ s'applique : F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F'(t) = \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx}e^{-x^2}\,dx.$$

Une intégration par parties donne

$$F'(t) = \Big[-\frac{i}{2}\cancel{e^{itx}e^{-x^2}}\Big] + \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}} ite^{itx}e^{-x^2}\,dx = -\frac{t}{2}F(t).$$

Intégrant cette équation différentielle en notant que $F(0) = \sqrt{\pi}$ il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F(t) = \sqrt{\pi}\exp\{-t^2/4\}.$$

(b) L'intégrabilité vient de la majoration ($\sharp$) et le calcul s'effectue comme à la question 1. En effet,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,x\rangle\big\}\exp\big\{-\langle Ax,x\rangle\big\}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,x\rangle\big\}\exp\big\{-\langle \Omega D\,{}^t\Omega x,x\rangle\big\}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,x\rangle\big\}\exp\big\{-\langle D\,{}^t\Omega x,{}^t\Omega x\rangle\big\}\,dx.\end{aligned}$$

Le changement de variables $z = {}^t\Omega x$, conduit à, comme $|\det\Omega| = 1$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,x\rangle\big\}\exp\big\{-\langle Ax,x\rangle\big\}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,\Omega z\rangle\big\}\exp\big\{-\langle Dz,z\rangle\big\}|\det\Omega|\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle {}^t\Omega y,z\rangle\big\}\exp\big\{-\langle Dz,z\rangle\big\}\,dz.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,x\rangle\big\}\exp\big\{-\langle Ax,x\rangle\big\}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^m}\prod_{j=1}^{m} \exp\big\{i({}^t\Omega y)_j, z_j\big\}\exp\big\{-\alpha_j z_j^2\big\}\,dz \\ &= \prod_{j=1}^{m}\int_{\mathbb{R}} \exp\big\{i({}^t\Omega y)_j, z_j\big\}\exp\big\{-\alpha_j z_j^2\big\}\,dz_j.\end{aligned}$$

Il vient facilement, utilisant le changement de variables $x_j = \sqrt{\alpha_j}z_j$ dans chacune des intégrales :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,x\rangle\big\}\exp\big\{-\langle Ax,x\rangle\big\}\,dx &= \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}}\int_{\mathbb{R}} \exp\big\{i({}^t\Omega y)_j x_j/\sqrt{\alpha_j}\big\}\exp\big\{-x_j^2\big\}\,dx_j \\ &= \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}}F\big(({}^t\Omega y)_j/\sqrt{\alpha_j}\big).\end{aligned}$$

La question précédente donne alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,x\rangle\big\}\exp\big\{-\langle Ax,x\rangle\big\}\,dx &= \sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}}\exp\Big\{-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\alpha_j}({}^t\Omega y)_j^2\Big\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}}\exp\Big\{-\frac{1}{4}\langle D^{-1\,t}\Omega y,{}^t\Omega y\rangle\Big\}\end{aligned}$$

soit encore, comme $A^{-1} = \Omega D^{-1}\,{}^t\Omega$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp\big\{i\langle y,x\rangle\big\}\exp\big\{-\langle Ax,x\rangle\big\}\,dx = \sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}}\exp\Big\{-\frac{1}{4}\langle A^{-1}y,y\rangle\Big\}.$$