Chaînes de Markov à espace d'états discrets

- Dans toute la suite, on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- E est un ensemble non vide **fini ou dénombrable**
  - ⋆ Dans la plupart des cas, E sera une partie de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{Z}$
- La tribu $\mathcal{P}(E)$ est notée $\mathcal{E}$ dans la suite.

1. Définitions, généralités.

Définition. Soient $X = (X_n)_{n\geq 0}$ un processus à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. On dit que X est une chaîne de Markov si, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in E^n$, $(x, y) \in E^2$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1} \dots, X_0 = x_0\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x\right).$$

Si de plus, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathbb{P}\left(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x\right)$ ne dépend pas de n, on dit que X est une chaîne de Markov homogène.

- Il faut se restreindre aux valeurs pour lesquelles $\mathbb{P}\left(X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1} \ldots, X_0 = x_0\right)$ et $\mathbb{P}\left(X_n = x\right)$ sont strictement positifs.
- La définition est équivalente au fait que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ mesurable et bornée,
$$\mathbb{E}\left[f(X_{n+1}) \,|\, \sigma(X_0, \ldots, X_n)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{n+1}) \,|\, X_n\right].$$
- À l'instant n, $\sigma(X_0, \ldots, X_n)$ représente l'information du « passé » du processus. Pour une chaîne de Markov, le futur X_{n+1} dépend du passé $(X_0, \ldots, X_n)$ seulement au travers du présent X_n.
- Pour une chaîne de Markov homogène :
  - ⋆ La loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n ne dépend pas de n : les probabilités de transition de X_n à X_{n+1} dépendent seulement de la position.
  - ⋆ La « matrice » $P = (P(x, y))_{x \in E, y \in E}$ définie par :
$$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \qquad P(x, y) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x\right)$$

est une matrice de transition à savoir, pour tout $x \in E$,

$$\forall y \in E, \quad 0 \leq P(x,y) \leq 1, \qquad \sum_{y \in E} P(x,y) = 1.$$

Exemple(s). 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. Alors X est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $E = \{0,1\}$ de matrice de transition

$$\forall x \in \{0,1\}, \quad P(x,0) = 1-p, \quad P(x,1) = p, \qquad P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

En effet, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = y\right).$$

Pour $x \in E$ et $n \in \mathbf{N}$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_n = x$ est la loi de Bernoulli de paramètre p ; elle ne dépend pas de x.

2. On note, pour $n \geq 0$, $S_n = X_0 + \ldots + X_n$. S est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $E = \mathbf{N}$ de matrice de transition

$$P(x,x) = 1-p, \qquad P(x,x+1) = p, \qquad P(x,y) = 0 \text{ si } y \notin \{x, x+1\}.$$

En effet, par indépendance,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_{n+1}=y \,|\, S_n=x,\dots,S_0=x_0\right) &= \mathbb{P}\left(S_n+X_{n+1}=y \,|\, S_n=x,\dots,S_0=x_0\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X_{n+1}=y-x \,|\, S_n=x,\dots,S_0=x_0\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X_{n+1}=y-x\right).\end{aligned}$$

Ici, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $X_n=x$ dépend de x.

Proposition (Relation de Chapman-Kolmogorov)**.** *Un processus $X=(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P si et seulement si, pour tout $n\in\mathbf{N}$ et tout $(x_0,\dots,x_n)\in E^{n+1}$,*

$$\mathbb{P}\left(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n\right)=\mathbb{P}\left(X_0=x_0\right)P(x_0,x_1)\dots P(x_{n-1},x_n). \tag{1}$$

- La formule se démontre facilement par récurrence :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n\right) &= \mathbb{P}\left(X_n=x_n,\dots,X_0=x_0\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_0=x_0\right)\,\mathbb{P}\left(X_n=x_n \,|\, X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_0=x_0\right),\\ &= \mathbb{P}\left(X_{n-1}=x_{n-1},\dots,X_0=x_0\right)\,P(x_{n-1},x_n).\end{aligned}$$

- Cette formule permet a fortiori de déterminer la loi de X_n pour tout n.

  ⋆ Commençons par la loi de X_1. Pour $y \in E$,

$$\mathbb{P}(X_1 = y) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_1 = y, X_0 = x) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_0 = x) P(x, y).$$

  ⋆ De la même manière, pour tout $z \in E$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = z) &= \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_2 = z, X_1 = y, X_0 = x) = \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_0 = x) P(x, y) P(y, z), \\ &= \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_0 = x) \sum_{y \in E} P(x, y) P(y, z) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_0 = x) P^2(x, z). \end{aligned}$$

  ⋆ Plus généralement,

$$\mathbb{P}(X_n = y) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X_0 = x) P^n(x, y).$$

- La formule (1) se généralise aisément de la manière suivante

$$\mathbb{P}\left(X_r = x_0, \dots, X_{r+n} = x_n\right) = \mathbb{P}(X_r = x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n).$$

Exercice. Soit X une chaîne de Markov de matrice de transition P. Pour $n \in \mathbf{N}$, $Y_n = X_{2n}$. Montrer que Y est une chaîne de Markov et préciser la matrice de transition.

Notations.

- Rappelons ici que E est fini ou dénombrable.
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E ; notons μ la loi de X soit

$$\mu(x) := \mu(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in X.$$

La **mesure de probabilité** μ est représenté par le vecteur **ligne** $(\mu(x))_{x \in E}$

- Une **fonction** f de E dans $\mathbf{R}$ est représentée par le vecteur **colonne** $(f(x))_{x \in E}$.
- On a bien évidemment

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) f(x) = \sum_{x \in E} \mu(x) f(x) = \mu f;$$

$\mathbb{E}\left[f(X)\right]$ est donnée par le produit matriciel de la ligne μ par la colonne f.

Exemple(s). Soient X à valeurs dans $\{1, 2\}$ avec $\mathbb{P}(X = 1) = 1/3$, $\mathbb{P}(X = 2) = 2/3$ et $f(x) = x^2$. On note

$$\mu = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = 1) & \mathbb{P}(X = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = f(1)\mathbb{P}(X=1) + f(2)\mathbb{P}(X=2) = 3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Soit X une chaîne de Markov homogène à valeurs dans E de matrice de transition P.
- Soit μ la loi de X_0 : on note dans ce cas $\mathbb{E}_\mu$, $\mathbb{P}_\mu$.
  - ⋆ Lorsque $X_0 = x$ avec $x \in E$ ($\mu = \delta_x$), on note $\mathbb{E}_x$, $\mathbb{P}_x$.
  - ⋆ Cette notation est aussi utilisée lorsqu'on travaille conditionnellement à $\{X_0 = x\}$.
  - ⋆ En particulier,

$$\mathbb{E}_x\left[f(X_1)\right] = \sum_{y \in E} f(y)\,\mathbb{P}_x(X_1 = y) = \sum_{y \in E} f(y)P(x,y) = Pf(x).$$

- Le calcul matriciel facilite les calculs qui découlent de (1) :
  - ⋆ La loi de X_1 est donnée par le produit ligne-matrice : $\mu \times P$
  - ⋆ Celle de X_2 par $\mu \times P^2$
  - ⋆ L'espérance de $f(X_2)$ par $\mu \times P^2 \times f$, etc.

Exemple(s). Soit X une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- On suppose que $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 3) = 1/2$ c'est à dire $\mu = (1/2 \quad 0 \quad 1/2)$.

  ⋆ La loi de X_1 est donnée par

  $$\mathbb{P}_{X_1} = (1/2 \quad 0 \quad 1/2) \times \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = (1/4 \quad 1/2 \quad 1/4),$$

  ce qui signifie que

  $$(\mathbb{P}(X_1 = 1) \quad \mathbb{P}(X_1 = 2) \quad \mathbb{P}(X_1 = 3)) = (1/4 \quad 1/2 \quad 1/4).$$

  ⋆ La loi de X_2 est donnée par

  $$\mathbb{P}_{X_2} = \mu P^2 = \mathbb{P}_{X_1} P = (1/2 \quad 0 \quad 1/2) \times \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_2=1) & \mathbb{P}(X_2=2) & \mathbb{P}(X_2=3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/8 & 1/4 & 3/8\end{pmatrix}.$$

- $\star$ On a de la même manière

$$\mathbb{E}\left[X_2^2\right] = \mu P^2 \times \begin{pmatrix}1^2\\ 2^2\\ 3^2\end{pmatrix} = 38/8 = 19/4.$$

- On suppose que $X_0 = 2$: $\mu = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

- $\star$ La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}_{X_1} = \begin{pmatrix}\mathbb{P}_2(X_1=1) & \mathbb{P}_2(X_1=2) & \mathbb{P}_2(X_1=3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix} \qquad 2^{\text{e}} \text{ ligne de } P.$$

- $\star$ On a aussi

$$\mathbb{E}_2\left[X_1^2\right] = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\ 4\\ 9\end{pmatrix} = 5.$$

2. Propriété de Markov.

- E est un ensemble fini ou dénombrable
- X est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P

Proposition (Propriété de Markov faible)**.** *Soit X une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P et de loi initiale μ.*

Conditionnellement à $\{X_n = x\}$, $(X_0, \ldots, X_n)$ et $(X_{n+k})_{k\geq 0}$ sont indépendants et $(X_{n+k})_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P partant de x (loi initiale δ_x).

- Ceci signifie que si f et g sont des fonctions mesurables et bornées

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_\mu \left[g(X_0, \ldots, X_n) f(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}) \,|\, X_n = x \right] \\ &\qquad = \mathbb{E}_\mu \left[g(X_0, \ldots, X_n) \,|\, X_n = x \right] \mathbb{E}_x \left[f(X_0, \ldots, X_k) \right]. \end{aligned}$$

  ⋆ « La fonction f peut dépendre de toute la suite $(X_{n+k})_{k\geq 0}$ »

- En particulier, si A et B sont deux ensembles mesurables,

$$\mathbb{P}_\mu\left((X_0,\dots,X_n)\in A,(X_n,X_{n+1},\dots,X_{n+k})\in B\,|\,X_n=x\right)$$
$$=\mathbb{P}_\mu\left((X_0,\dots,X_n)\in A\,|\,X_n=x\right)\,\mathbb{P}_x\left((X_0,\dots,X_k)\in B\right).$$

  ⋆ « L'ensemble B peut dépendre de toute la suite $(X_{n+k})_{k\geq 0}$ »

- Ceci implique aussi que

$$\mathbb{E}\left[f(X_n,\dots,X_{n+k})\,|\,\sigma(X_0,\dots,X_n)\right]=\mathbb{E}_{X_n}\left[f(X_0,\dots,X_k)\right].$$

  ⋆ En particulier,

$$\mathbb{E}\left[f(X_{n+1})\,|\,\sigma(X_0,\dots,X_n)\right]=\mathbb{E}\left[f(X_{n+1})\,|\,X_n\right]=\mathbb{E}_{X_n}\left[f(X_1)\right]=Pf(X_n).$$

Démonstration. D'après la relation de Chapman-Kolmogorov (1), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\mu\left(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n,X_{n+1}=x_{n+1},\dots X_{n+k}=x_{n+k}\,|\,X_n=x_n\right)\\
&\quad=\mathbb{P}_\mu\left(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n,X_{n+1}=x_{n+1},\dots X_{n+k}=x_{n+k}\right)\mathbb{P}\left(X_n=x_n\right)^{-1}\\
&\quad=\frac{\mu(x_0)P(x_0,x_1)\dots P(x_{n-1},x_n)}{\mathbb{P}\left(X_n=x_n\right)}\times P(x_n,x_{n+1})\dots P(x_{n+k-1},x_{n+k})\\
&\quad=\mathbb{P}_\mu\left(X_0=x_0,\dots,X_n=x_n\,|\,X_n=x_n\right)\mathbb{P}_{x_n}\left(X_0=x_n,X_1=x_{n+1},\dots,X_k=x_{n+k}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple(s). Soit $A \subset E$. On considère les temps d'entrée et de retour dans A resp.

$$T_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \qquad S_A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}.$$

Pour $x \in E$, on note $z(x) = \mathbb{P}_x\left(\{T_A < +\infty\}\right)$. Bien évidemment, si $x \in A$, $z(x) = 1$.

Observons que

$$S_A\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = 1 + T_A\left((x_{n+1})_{n\geq 0}\right).$$

En effet, pour $k \geq 1$, $S_A\left((x_n)_{n\geq 0}\right) = k$ équivaut à $x_1 \notin A, \ldots, x_{k-1} \notin A$, $x_k \in A$ et $T_A\left((y_n)_{n\geq 0}\right) = k-1$ équivaut à $y_0 \notin A, \ldots, y_{k-2} \notin A$, $y_{k-1} \in A$ ce qui donne, pour $y_n = x_{n+1}$, $T_A\left((x_{n+1})_{n\geq 0}\right) = k-1$ équivalent à $x_1 \notin A, \ldots, x_{k-1} \notin A$, $x_k \in A$.

Revenons à la fonction z. Si $x \in A^c$, $X_0 \notin A$ et $T_A\left((X_n)_{n\geq 0}\right) = S_A\left((X_n)_{n\geq 0}\right)$. On a donc, si $x \notin A$,

$$\begin{aligned} z(x) &= \mathbb{P}_x\left(\{S_A\left((X_n)_{n\geq 0}\right) < +\infty\}\right) = \mathbb{P}_x\left(\{1 + T_A\left((X_{n+1})_{n\geq 0}\right) < +\infty\}\right) \\ &= \mathbb{P}_x\left(\{T_A\left((X_{n+1})_{n\geq 0}\right) < +\infty\}\right). \end{aligned}$$

On a donc, pour $x \in A^c$,

$$\begin{aligned}
z(x) &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x \left(\{T_A \left((X_{n+1})_{n \geq 0} \right) < +\infty\} \cap \{X_1 = y\} \right) \\
&= \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x \left(\{T_A \left((X_{n+1})_{n \geq 0} \right) < +\infty\} \mid \{X_1 = y\} \right) \mathbb{P}_x \left(X_1 = y \right) \\
&= \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x \left(\{T_A \left((X_{n+1})_{n \geq 0} \right) < +\infty\} \mid \{X_1 = y\} \right) P(x,y) \\
&= \sum_{y \in E} \mathbb{P}_y \left(\{T_A \left((X_n)_{n \geq 0} \right) < +\infty\} \right) P(x,y) = \sum_{y \in E} P(x,y) z(y) = Pz(x).
\end{aligned}$$

Finalement, $z(x) = 1$ si $x \in A$ et $z(x) = Pz(x)$ si $x \in A^c$.

De la même manière, si on note, pour $x \in E$, $u(x) = \mathbb{E}_x \left[T_A \right]$, on a $u(x) = 0$ si $x \in A$ et, pour $x \in A^c$,

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathbb{E}_x \left[1 + T_A \left((X_{n+1})_{n \geq 0} \right) \right] = 1 + \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x \left[T_A \left((X_{n+1})_{n \geq 0} \right) \mathbf{1}_{X_1 = y} \right] \\
&= 1 + \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x \left[T_A \left((X_{n+1})_{n \geq 0} \right) \mid \{X_1 = y\} \right] \mathbb{P}_x (X_1 = y) \\
&= 1 + \sum_{y \in E} \mathbb{E}_y \left[T_A \left((X_n)_{n \geq 0} \right) \right] P(x,y) = 1 + \sum_{y \in E} P(x,y) u(y) = 1 + Pu(x).
\end{aligned}$$

Voyons une application concrète de cette formule. Un collectionneur souhaite récolter les m figurines distinctes que l'on trouve dans les paquets de céréales, chaque paquet contenant une seule figurine prise au hasard parmi les m possibles. Combien de paquets devra-t-il acheter en moyenne ?

Soit, pour $n \geq 0$, X_n le nombre de figurines obtenues après l'achat de n paquets. Le processus X est une chaîne de Markov homogène partant de $X_0 = 0$ à valeurs dans $\{0, \ldots, m\}$. La matrice de transition est donnée par $P(0,1) = 1$, $P(m,m) = 1$ et

$$P(k,k) = \frac{k}{m}, \qquad P(k,k+1) = \frac{m-k}{m}, \qquad \text{si} \quad k \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

Le nombre moyen de paquets à acheter pour obtenir la collection complète est $\mathbb{E}_0\left[T_m\right]$.

Notant, pour $k \in \{1, \ldots, m\}$, $u(k) = \mathbb{E}_k\left[T_m\right]$ on a : $u(m) = 0$ et, pour $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, $u(k) = 1 + Pu(k)$. On obtient alors

$$u(k) = 1 + \frac{k}{m}\, u(k) + \frac{m-k}{m}\, u(k+1), \quad k \in \{0, \ldots, m-1\}, \qquad u(m) = 0.$$

On a donc, pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, $u(k) - u(k+1) = \frac{m}{m-k}$ et, comme $u(m) = 0$, pour tout $p \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$u(p) = \sum_{k=p}^{m-1} \left(u(k) - u(k+1)\right) = \sum_{k=p}^{m-1} \frac{m}{m-k} = m \sum_{i=1}^{m-p} \frac{1}{i}.$$

En particulier, $u(0) = \mathbb{E}_0 [T_m] = m \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$. Le nombre moyen de paquets à acheter pour avoir la collection complète est donc équivalent à $m \ln m$ quand $m \to \infty$.

Proposition (Propriété de Markov forte)**.** *Soient X une chaîne de Markov homogène de loi initiale μ et T un temps d'arrêt.*

Pour toute fonction f mesurable et toute variable aléatoire Z, $\mathcal{F}_T$-mesurable, f et Z bornées ou positives,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\mu \left[Z\, f(X_T, X_{T+1}, \ldots, X_{T+k}) \,|\, \{X_T = x\} \cap \{T < \infty\} \right] \\ &\qquad = \mathbb{E}_\mu \left[Z \,|\, \{X_T = x\} \cap \{T < \infty\} \right] \mathbb{E}_x \left[f(X_0, \ldots, X_k) \right].\end{aligned}$$

- « La fonction f peut dépendre de toute la suite $(X_{T+k})_{k \geq 0}$ »
- En particulier, si $A \in \mathcal{F}_T$ et B sont deux ensembles mesurables,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_\mu \left(A, (X_T, X_{T+1}, \ldots, X_{T+k}) \in B \,|\, \{X_T = x\} \cap \{T < \infty\} \right) \\ &\qquad = \mathbb{P}_\mu \left(A \,|\, \{X_T = x\} \cap \{T < \infty\} \right) \mathbb{P}_x \left((X_0, \ldots, X_k) \in B \right).\end{aligned}$$

  ⋆ « L'ensemble B peut dépendre de toute la suite $(X_{T+k})_{k \geq 0}$ »

- Ceci implique aussi que

$$\mathbb{E}\left[f(X_T,\ldots,X_{T+k})\,\mathbf{1}_{T<\infty}\,|\,\mathcal{F}_T\right]=\mathbb{E}_{X_T}\left[f(X_0,\ldots,X_k)\right]\,\mathbf{1}_{T<\infty}.$$

  ⋆ En particulier, si T est fini,

$$\mathbb{E}\left[f(X_{T+1})\,|\,\mathcal{F}_T\right]=\mathbb{E}_{X_T}\left[f(X_1)\right]=Pf(X_T)=\mathbb{E}\left[f(X_{T+1})\,|\,X_T\right].$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\mu\left[Z\,f(X_T,X_{T+1},\ldots,X_{T+k})\,|\,\{X_T=x\}\cap\{T<\infty\}\right]\\&\qquad=\mathbb{P}_\mu\left(\{X_T=x\}\cap\{T<\infty\}\right)\sum_{n\in\mathbf{N}}\mathbb{E}_\mu\left[Z\,f(X_n,X_{n+1},\ldots,X_{n+k})\,\mathbf{1}_{X_n=x}\,\mathbf{1}_{T=n}\right].\end{aligned}$$

Comme $Z\mathbf{1}_{T=n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, d'après la propriété de Markov faible,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\mu\left[Z\,f(X_n,X_{n+1},\ldots,X_{n+k})\,\mathbf{1}_{X_n=x}\,\mathbf{1}_{T=n}\right]\\&\qquad=\mathbb{P}_\mu(X_n=x)\,\mathbb{E}_\mu\left[Z\mathbf{1}_{T=n}\,f(X_n,X_{n+1},\ldots,X_{n+k})\,|\,X_n=x\right]\\&\qquad=\mathbb{P}_\mu(X_n=x)\,\mathbb{E}_\mu\left[Z\mathbf{1}_{T=n}\,|\,X_n=x\right]\,\mathbb{E}_x\left[f(X_0,\ldots,X_k)\right]\\&\qquad=\mathbb{E}_\mu\left[Z\mathbf{1}_{T=n}\mathbf{1}_{X_n=x}\right]\,\mathbb{E}_x\left[f(X_0,\ldots,X_k)\right]\\&\qquad=\mathbb{E}_\mu\left[Z\mathbf{1}_{T=n}\mathbf{1}_{X_T=x}\right]\,\mathbb{E}_x\left[f(X_0,\ldots,X_k)\right].\end{aligned}$$

Le résultat s'en suit immédiatement en remarquant que $\sum_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{1}_{T=n}=\mathbf{1}_{T<\infty}$. □

3. Classification des états.

- E ensemble non vide fini ou dénombrable
- X chaîne de Markov homogène de matrice de transition P

Définition. Soient x et y deux points de E. On dit que

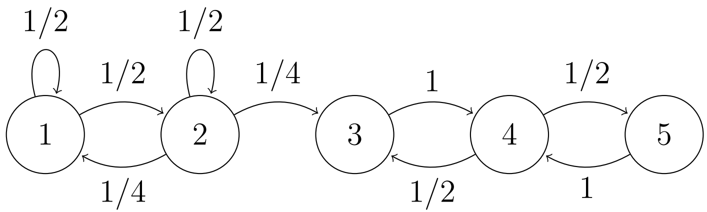
  - x mène à y si il existe un entier n tel que $\mathbb{P}_x(X_n = y) = P^n(x,y) > 0$; on note $x \to y$
  - x communique avec y si x mène à y et y mène à x ; on note $x \leftrightarrow y$

- x mène à y si la probabilité de passer de x à y, éventuellement en plusieurs coups, est strictement positive
- On note $G(x,y) = \sum_{n\geq 0} P^n(x,y)$; x mène à y équivaut à $G(x,y) > 0$
- La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur E
  - ⋆ On obtient une partition de E en regardant les classes d'équivalences

⋆ La classe d'équivalence de $x \in E$ est noté $C(x)$

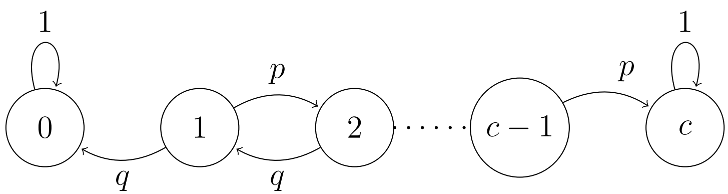
Exemple(s). 1. On considère $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- Deux classes : $\{1, 2\}$ et $\{3, 4, 5\}$
  - ⋆ 2 mène à 3 mais 3 ne mène pas à 2

2. Ruine du joueur : $c = a + b$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$,

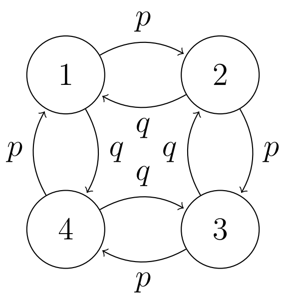


- Trois classes : $\{0\}$, $\{1, \ldots, a+b-1\}$, $\{a+b\}$
- On dit que 0 et $a+b$ sont des états absorbants

Définition. On dit que la chaîne est irreductible si E est réduit à une seule classe.

Exemple(s). Marche aléatoire sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Pour $0 < p < 1$, notant $q = 1 - p$, on a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$



Récurrence, Transience.

- Quelques notations : pour $x \in E$,
  - $\star$ Temps d'atteinte de x : $T_x = \inf\{n \geq 0 : X_n = x\}$,
  - $\star$ Nombre de passages par x : $N_x = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{X_n = x} = \#\{n \geq 0 : X_n = x\}$,
  - $\star$ Nombre moyen de passages par x : $\mathbb{E}_y\left[N_x\right] = \sum_{n\geq 0} P^n(y,x) = G(y,x)$,
  - $\star$ Temps de retour en x : $S_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$,
  - $\star$ Nombre de retours en x : $L_x = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{X_n = x} = \#\{n \geq 1 : X_n = x\}$.

Définition. Le point $x \in E$ est récurrent si $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) = 0$.

Dans le cas contraire, c'est à dire lorsque $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) > 0$, x est dit transient ou transitoire.

- Dire que le point x est récurrent signifie que, partant de x, la chaîne repasse par x avec probabilité 1.

Exemple(s). Reprenons le 1^er exemple de la page 18. Le point 1 est transient. En effet,

$$\{X_0 = 1\} \cap \{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 3\} \subset \{S_1 = +\infty\}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}_1(S_1 = +\infty) \geq P(1,2)P(2,3) > 0.$$

Pour certaines trajectoires, on ne repasse jamais par 1.

Lemme. *Soient x et y deux points de E. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$\mathbb{P}_y\left(L_x \geq n+1\right) = \mathbb{P}_y\left(S_x < +\infty\right)\mathbb{P}_x\left(L_x \geq n\right). \tag{2}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}_y\left[L_x\right] = \mathbb{P}_y\left(S_x < +\infty\right)\left(1 + \mathbb{E}_x\left[L_x\right]\right).$$

- Lorsque $y = x$, ces formules se réécrivent

$$\mathbb{P}_x(N_x \geq n+1) = \mathbb{P}_x\left(S_x < +\infty\right)\mathbb{P}_x\left(N_x \geq n\right), \quad n \in \mathbf{N}^*,$$
$$\mathbb{E}_x\left[N_x\right] = 1 + \mathbb{P}_x\left(S_x < +\infty\right)\mathbb{E}_x\left[N_x\right].$$

- Lorsque $y \neq x$,

$$\mathbb{P}_y(N_x \geq n) = \mathbb{P}_y\left(S_x < +\infty\right)\mathbb{P}_x\left(N_x \geq n\right), \quad n \in \mathbf{N}^*,$$
$$\mathbb{E}_y\left[N_x\right] = \mathbb{P}_y\left(S_x < +\infty\right)\mathbb{E}_x\left[N_x\right]. \tag{3}$$

Démonstration. On a $\{S_x < +\infty\} = \{L_x \geq 1\}$ et, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\{L_x \geq n+1\} = \bigcup_{k \geq 1} \{L_x \geq n+1\} \cap \{S_x = k\}.$$

Or $\{S_x = k\} = \{X_1 \neq x\} \cap \ldots \cap \{X_{k-1} \neq x\} \cap \{X_k = x\}$ et donc, sur $\{S_x = k\}$, on a

$$L_x = 1 + \sum_{n \geq k+1} \mathbf{1}_{X_n = x} = 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{X_{k+n} = x}.$$

Par conséquent, d'après la propriété de Markov, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_y\left(L_x \geq n+1, S_x = k\right) &= \mathbb{P}_y\left(\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{X_{k+n}=x} \geq n, S_x = k\right) \\
&= \mathbb{P}_y(X_k = x)\,\mathbb{P}_y\left(\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{X_{k+n}=x} \geq n, S_x = k \,|\, X_k = x\right) \\
&= \mathbb{P}_y(X_k = x)\,\mathbb{P}_y\left(\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{X_{k+n}=x} \geq n \,|\, X_k = x\right)\mathbb{P}_y\left(S_x = k \,|\, X_k = x\right) \\
&= \mathbb{P}_y(X_k = x)\,\mathbb{P}_x\left(\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{X_n=x} \geq n\right)\mathbb{P}_y\left(S_x = k \,|\, X_k = x\right) \\
&= \mathbb{P}_x\left(L_x \geq n\right)\,\mathbb{P}_y\left(S_x = k\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_y\left(L_x \geq n+1\right) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_y\left(L_x \geq n+1, S_x = k\right) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x\left(L_x \geq n\right)\,\mathbb{P}_y\left(S_x = k\right) \\
&= \mathbb{P}_x\left(L_x \geq n\right)\,\mathbb{P}_y\left(S_x < +\infty\right).
\end{aligned}$$

La dernière formule s'obtient en remarquant que

$$\mathbb{E}_y\left[L_x\right] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_y\left(L_x \geq n+1\right) = \mathbb{P}_y\left(S_x < \infty\right)\,\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x\left(L_x \geq n\right) = \mathbb{P}_y\left(S_x < \infty\right)\left(1 + \mathbb{E}_x\left[L_x\right]\right).$$

$\square$

Théorème (Récurrence/Transience). *Soit $x \in E$. On a l'alternative suivante :*

- *Si x est récurrent i.e. $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) = 0$, alors, $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, $N_x = +\infty$.*
- *Si x est transient i.e. $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) > 0$ alors, sous $\mathbb{P}_x$, N_x suit la loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty)$.*

- Lorsque x est récurrent, partant de x, la chaîne passe par x une infinité de fois avec probabilité 1 : $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$; en particulier, $\mathbb{E}_x[N_x] = +\infty$.
- Lorsque x est transient, N_x est fini $\mathbb{P}_x$-presque sûrement i.e. $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 0$ et $\mathbb{E}_x[N_x] = \mathbb{P}_x(S_x = +\infty)^{-1} < +\infty$.
- En conséquence, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) = 0 \quad &\iff \quad \mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1 \quad \iff \quad \mathbb{E}_x[N_x] = +\infty, \\
\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) > 0 \quad &\iff \quad \mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 0 \quad \iff \quad \mathbb{E}_x[N_x] < +\infty.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x \in E$ un point récurrent i.e. $\mathbb{P}_x(S_x < +\infty) = 1$. D'après (2) pour $y = x$, pour tout $k \geq 1$, puisque $N_x = L_x + 1$ lorsque X part de x,

$$\mathbb{P}_x(N_x \geq k+1) = \mathbb{P}_x(L_x \geq k) = \mathbb{P}_x(S_x < +\infty)\,\mathbb{P}_x(L_x \geq k-1) = \mathbb{P}_x(N_x \geq k),$$

et donc, pour $k \geq 1$, $\mathbb{P}_x(N_x \geq k) = \mathbb{P}_x(N_x \geq 1) = 1$: $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$.

Soit $x \in E$ un point transient i.e. $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) > 0$. D'après (2) pour $y = x$, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}_x(N_x \geq k+1) = \mathbb{P}_x(L_x \geq k) = \mathbb{P}_x(S_x < +\infty)\,\mathbb{P}_x(L_x \geq k-1) = \mathbb{P}_x(S_x < +\infty)\,\mathbb{P}_x(N_x \geq k),$$

et donc, pour $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}_x(N_x \geq k) = \mathbb{P}_x(S_x < +\infty)^{k-1}\,\mathbb{P}_x(N_x \geq 1) = \left[1 - \mathbb{P}_x(S_x = +\infty)\right]^{k-1}.$$

N_x suit, sous $\mathbb{P}_x$, la loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty)$. □

Proposition.

1. *La récurrence et la transience sont des propriétés de classe : si x et y communiquent, x et y sont soit tous deux transients, soit tous deux récurrents.*

2. *Si x est récurrent et mène à y, alors la chaîne visite x une infinité de fois à partir de y i.e. $\mathbb{P}_y(N_x = +\infty) = 1$. En particulier, $y \in C(x)$ et $\mathbb{P}_y(S_x < +\infty) = 1$.*

- En particulier, la probabilité de sortir d'une classe récurrente est nulle : si x est récurrent

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \mathbb{P}_x\left(X_n \notin C(x)\right) = 0.$$

Démonstration. 1. Si x et y communiquent, il existe n et m tels que : $P^n(x,y) > 0$ et $P^m(y,x) > 0$. Pour tout $k \geq 0$,

$$P^{n+k+m}(x,x) \geq P^n(x,y) P^k(y,y) P^m(y,x).$$

Par conséquent,

$$G(x,x) \geq \sum_{k \geq 0} P^{n+k+m}(x,x) \geq P^n(x,y)\, G(y,y)\, P^m(y,x).$$

Si x est transient, alors $\mathbb{E}_x[N_x] = G(x,x)$ est fini et il en va de même pour y. Si y est récurrent, $G(y,y) = +\infty$ et donc $G(x,x) = +\infty$. Le résultat s'obtient par symétrie.

2. D'après la propriété de Markov, pour tout n,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(N_x < +\infty) = \mathbb{P}_x\left(\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{X_{n+k}=x} < +\infty\right) &\geq \mathbb{P}_x\left(\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{X_{n+k}=x} < +\infty, X_n = y\right) \\ &= \mathbb{P}_x(X_n = y)\, \mathbb{P}_y(N_x < +\infty)\end{aligned}$$

Par conséquent, x étant récurrent, pour tout n, $\mathbb{P}_x(X_n = y)\, \mathbb{P}_y(N_x < +\infty) = 0$ et, sommant en n, $G(x,y)\, \mathbb{P}_y(N_x < +\infty) = 0$. Comme x mène à y, $G(x,y) > 0$ et donc $\mathbb{P}_y(N_x < +\infty) = 0$. $\square$

Comportement d'une chaîne de Markov.

- Si on part d'un point x récurrent, la chaîne reste dans la classe de x et visite chacun des états une infinité de fois.

- Si on part d'un point x transient, après un nombre fini de visites, la chaîne ne passe plus par ce point ; si x mène à un point récurrent, en temps fini la chaîne tombe dans cette classe récurrente et en visite chacun des états une infinité de fois.

Proposition. *Si E est **fini**, il existe au moins un état récurrent. Toute chaîne irréductible sur un espace **fini** est récurrente.*

Démonstration. Si tous les points sont transients, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x[N_x] < +\infty$. D'après la relation (3), pour tout $y \in E$ et tout $x \in E$, $\mathbb{E}_y[N_x] < +\infty$. Comme E est fini, pour tout y,

$$\sum_{x \in E} \mathbb{E}_y[N_x] = \mathbb{E}_y\left[\sum_{x \in E} N_x\right] < +\infty.$$

Ceci est impossible puisque $\sum_{x \in E} \mathbf{1}_{X_n = x} = 1$ et $\sum_{x \in E} N_x = +\infty$. □

4. Probabilité invariante.

- E ensemble fini ou dénombrable ;
- X chaîne de Markov homogène de matrice de transition P à valeurs dans E.

Définition. Une mesure de probabilité est invariante pour P si $\mu P = \mu$ i.e.

$$\forall x \in E, \quad (\mu P)(x) = \sum_{y \in E} \mu(y) P(y, x) = \mu(x).$$

- Ceci signifie que si X_0 suit la loi μ, alors pour tout n, X_n suit la loi μ
  - ⋆ Le comportement statistique de X_n ne dépend pas de n
  - ⋆ Attention, les trajectoires $(X_n(\omega))_{n \geq 0}$ ne sont pas nécessairement constantes

Exemple(s). • Soit X une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0, 1\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p' & 1-p' \end{pmatrix},$$

où p et p' sont dans $]0,1[$.

Soit μ une mesure de probabilité sur $\{0,1\}$ i.e. $\mu(0)+\mu(1)=1$ avec $\mu(0)$, $\mu(1)$ dans $[0,1]$. μ est invariante pour P si

$$\mu P = \mu, \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix}\mu(0) & \mu(1)\end{pmatrix} P = \begin{pmatrix}\mu(0) & \mu(1)\end{pmatrix}.$$

Ceci conduit au système linéaire suivant :

$$\mu(0)(1-p)+\mu(1)p' = \mu(0), \qquad \mu(0)p+\mu(1)(1-p') = \mu(1)$$

équivalent à $\mu(0)p-\mu(1)p'=0$. Comme $\mu(0)+\mu(1)=1$, on a

$$\mu(0) = \frac{p'}{p+p'}, \qquad \mu(1) = \frac{p}{p+p'}.$$

- Soit X la marche aléatoire sur $\{1,2,3,4\}$. La matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que la loi uniforme sur $\{1,2,3,4\}$ i.e. $\mu = \begin{pmatrix}1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$ est invariante pour P.

- Rappelons qu'un état $x \in E$ est
  - $\star$ transient si $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) > 0$;
  - $\star$ récurrent si $\mathbb{P}_x(S_x = +\infty) = 0$.

Définition. Soit $x \in E$ un état récurrent. On dit que x est *récurrent positif* si $\mathbb{E}_x\left[S_x\right] < +\infty$ et que x est *récurrent nul* si $\mathbb{E}_x\left[S_x\right] = +\infty$.

- Il s'agit d'une propriété de classe : si x et y communiquent avec x (et y) récurrents, alors soit x et y sont tous deux récurrents positifs soit tous deux récurrents nuls.
  - $\star$ En particulier, si la chaîne est irréductible et récurrente alors soit tous les états sont récurrents positifs soit tous récurrents nuls.
- Si E est **fini**, tous les états récurrents sont récurrents positifs.
  - $\star$ En particulier, toute chaîne irréductible sur E **fini** est récurrente positive.

Théorème. *Soit X une chaîne de Markov homogène **irréductible**. On a équivalence entre :*

1. *La chaîne est récurrente positive ;*

2. *La chaîne possède une unique probabilité invariante π et*

$$\forall x \in E, \quad \pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x\left[S_x\right]}.$$

- En particulier, toute chaîne **irréductible** à valeurs dans E **fini** possède une unique probabilité invariante.

Définition. Soient μ une mesure de probabilité et P une matrice de transition. On dit que μ est réversible pour P si

$$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \qquad \mu(x)P(x,y) = \mu(y)P(y,x).$$

Proposition. *Soient μ une mesure de probabilité et P une matrice de transition. Si μ est réversible pour P, alors μ est invariante pour P.*

- Il est souvent plus facile de trouver les probabilités réversibles.

Démonstration. Soit $x \in E$. Si μ est réversible, on a

$$(\mu P)(x) = \sum_{y\in E} \mu(y)P(y,x) = \sum_{y\in E} \mu(x)P(x,y) = \mu(x) \sum_{y\in E} P(x,y) = \mu(x).$$

$\square$

4.1. Théorèmes ergodiques.

Théorème. *Soit X une chaîne de Markov homogène de loi initiale μ,* ***irréductible*** *et* ***récurrente positive****. On note π la probabilité invariante. Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\pi)$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi f = \sum_{x\in E} \pi(x) f(x), \quad \mathbb{P}_\mu - p.s.$$

- $f \in \mathrm{L}^1(\pi)$ signifie que $\sum_{x\in E} |f(x)|\,\pi(x) < +\infty$.
- Si X est irréductible, pour tout $x \in E$, $\mathbb{P}_\mu$ presque sûrement,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=x} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbb{E}_x\left[S_x\right]} = \begin{cases} \pi(x), & \text{si } X \text{ est récurrente positive,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- En prenant, l'espérance, on obtient, pour tout $y \in E$ et $x \in E$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k(y,x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbb{E}_x\left[S_x\right]} = \begin{cases} \pi(x), & \text{si } X \text{ est récurrente positive,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Peut-on obtenir $\lim_{n\to\infty} P^n(y,x)$?
  - $\star$ Si x est transient, pour tout y, $\lim_{n\to\infty} P^n(y,x) = 0$. En effet,

$$\mathbb{E}_y\left[N_x\right] = G(y,x) = \sum_{n\geq 0} P^n(y,x) < +\infty.$$

- Pour $x \in E$, on note

$$I(x) = \left\{n \geq 1 : P^n(x,x) > 0\right\}, \qquad \mathrm{per}(x) = \mathrm{PGCD}(I(x)).$$

- Un état $x \in E$ est apériodique si $\mathrm{per}(x) = 1$
  - $\star$ S'il existe n tel que $P^n(x,x) > 0$ et $P^{n+1}(x,x) > 0$ alors x est apériodique
  - $\star$ Il s'agit d'une propriété de classe

Proposition. *Soit X une chaîne de Markov homogène, irréductible, récurrente positive et apériodique. Alors,*

$$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \qquad \lim_{n\to\infty} P^n(y,x) = \pi(x).$$

- Si X est irréductible, récurrente nulle alors

$$\forall x \in E, \quad \forall y \in E, \qquad \lim_{n\to\infty} P^n(y,x) = 0.$$