Lois de probabilité.

Si X est une variable aléatoire réelle, sa fonction de répartition est la fonction

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, sa fonction caractéristique est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \qquad \varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\cdot X}\right].$$

Lois discrètes.

Notation : Pour p élément de $[0,1]$, on note $q = 1-p$.

Si X est à valeurs entières, sa fonction ou série génératrice est la série entière

$$\forall |z| \leq 1, \qquad G_X(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right].$$

On a alors $\varphi_X(t) = G_X\left(e^{it}\right)$

Loi de Bernoulli, $\mathcal{B}(p)$, $0 \leq p \leq 1$: $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = q$;

Loi binomiale, $\mathcal{B}(n,p)$, $n \geq 1$, $0 \leq p \leq 1$: pour $k = 0, \ldots, n$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathrm{C}_n^k\, p^k q^{n-k}$;

Loi géométrique, $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$: pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = pq^{k-1}$;

Loi binomiale négative, $\mathcal{B}_-(n,p)$, $n \geq 1$, $0 < p < 1$: pour $k \geq n$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathrm{C}_{k-1}^{n-1}\, p^n q^{k-n}$;

Loi de Poisson, $\mathcal{P}(c)$, $c > 0$: pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-c}c^k/k!$.

Loi / v.a.	Notation	Espérance	Variance	G_X
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	p	pq	$q+pz$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	np	npq	$(q+pz)^n$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$1/p$	q/p^2	$pz\,(1-qz)^{-1}$
Binomiale négative	$\mathcal{B}_-(n,p)$	n/p	nq/p^2	$\left(pz\,(1-qz)^{-1}\right)^n$
Poisson	$\mathcal{P}(c)$	c	c	$e^{c(z-1)}$

Lois à densité.

X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ a pour densité p_X si

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \qquad \mathbb{P}(X \in B) = \int_B p_X(x)\,dx.$$

Loi uniforme sur $[a,b]$, $\mathcal{U}(a,b)$, $a < b$: $p_X(x) = (b-a)^{-1}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, $F_X(t) = 0$ si $t < a$, $F_X(t) = (b-a)^{-1}(t-a)$ si $a \leq t < b$, $F_X(t) = 1$ si $t \geq b$;

Loi de Cauchy, $\mathcal{C}(c)$, $c > 0$: $\quad p_X(x) = c\pi^{-1}\left(c^2 + x^2\right)^{-1}$, $\quad F_X(t) = 1/2 + \pi^{-1}\arctan\left(c^{-1}t\right)$;

Loi exponentielle, $\mathcal{E}(c)$, $c > 0$: $\quad p_X(x) = ce^{-cx}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, $\quad$ si $t < 0$ $F_X(t) = 0$, si $t \geq 0$ $F(t) = 1 - e^{-ct}$;

Loi de Laplace, $\mathcal{L}(c)$, $c > 0$: $\quad p_X(x) = ce^{-c|x|}/2$, $\quad F_X(t) = e^{ct}/2$ si $t < 0$, $F_X(t) = 1 - e^{-ct}/2$ si $t \geq 0$;

Loi gaussienne ou normale réelle, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$: $\quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

Loi / v.a.	Notation	Espérance	Variance	φ_X
Uniforme	$\mathcal{U}(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$\left(e^{itb} - e^{ita}\right)\left(it(b-a)\right)^{-1}$
Cauchy	$\mathcal{C}(c)$	non	non	$e^{-c\|t\|}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(c)$	c^{-1}	c^{-2}	$c(c-it)^{-1}$
Laplace	$\mathcal{L}(c)$	0	$2c^{-2}$	$c^2\left(c^2+t^2\right)^{-1}$
Gaussienne	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	m	σ^2	$\exp\left(itm - \sigma^2t^2/2\right)$