UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Master 1re année — Année 2006/2007

Module G12 :

Quelques exercices sur le calcul des probabilités

Hélène Guérin, Florent Malrieu, Aurélie Muller

helene.guerin@univ-rennes1.fr, florent.malrieu@univ-rennes1.fr, muller@lyon.cemagref.fr

http://perso.univ-rennes1.fr/philippe.briand/proba/

1. Généralités sur les probabilités

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } 1\}\,.$$

Montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu.

Exercice 2. 1. Soient $(E_1, \mathcal{E}_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2)$ deux espace mesurables. On suppose que $\mathcal{E}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ avec $E_i \in \mathcal{C}_i$.

(a) Montrer que la tribu $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est engendrée par les pavés $C_1 \times C_2$ où $C_i \in \mathcal{C}_i$.

(b) En déduire que $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbf{R}^{d+n})$.

2. (a) Soit $X = (X_1, X_2)$ une application à valeurs dans $E_1 \times E_2$ (définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). Montrer que X est une v.a. si et seulement si X_1 et X_2 sont des v.a.

(b) En déduire les propriétés algébriques des v.a.

Exercice 3. Soit $(A_n)_\mathbf{N}$ une suite d'événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n).$$

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Comparer les événements $\{\limsup_{n\to+\infty} X_n > 1\}$ et $\limsup \{X_n > 1\}$ puis $\{\limsup_{n\to+\infty} X_n \geq 1\}$ et $\limsup \{X_n \geq 1\}$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_\mathbf{N}$ une suite de v.a. numériques définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon_n) < +\infty$ où $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels positifs convergeant vers 0. Montrer que $(X_n)_\mathbf{N}$ converge presque sûrement vers 0.

Exercice 6. Soit X une v.a.r. normale centrée réduite définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Calculer, pour tout réel s, $\mathbb{E}\left[e^{sX}\right]$. En déduire que $e^{s|X|}$ est intégrable pour tout $s \in \mathbf{R}$.

2. Montrer que $z \longmapsto \mathbb{E}\left[e^{zX}\right]$ est analytique sur $\mathbf{C}$.

3. En déduire que $\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exercice 7. On considère la fonction réelle $u(x) = (1 + |x|)^{-1}$.

1. Soit X une variable réelle. On considère, pour $s \geq 0$, $\theta(s) = \mathbb{E}[u(sX)]$.

Montrer que θ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Exprimer $\theta'(s)$ comme une espérance. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \theta(s)$.

2. Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $c \in]0, 1[$. On considère la variable aléatoire $X = (U - c)^+$. Calculer, pour la variable X, $\theta(s)$ puis $\lim_{s\to+\infty} \theta(s)$. Est-ce cohérent avec la question précédente ?

Correction. 1. Pour tout $s \geq 0$, $\omega \mapsto u\,[sX(\omega)]$ est mesurable. On a d'autre part,

$$\sup\nolimits_{s\geq 0} |u(sX)| = \sup_{s\geq 0} \frac{1}{1 + s|X|} \leq 1. \tag{1}$$

La fonction constante égale à un est intégrable puisque nous travaillons sur un espace probabilisé.

Remarquons, que pour ω fixé, la fonction $s \longmapsto u\,[sX(\omega)]$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ et vérifie $\lim_{s\to+\infty} u\,[sX(\omega)] = \mathbf{1}_{\{0\}}(X(\omega))$. La majoration (1) permet d'appliquer les résultats de continuité et passage à la limite pour les intégrales à paramètres : la fonction θ est définie et continue sur $\mathbf{R}^+$ et on a $\lim_{s\to+\infty} \theta(s) = \mathbb{E}\,[\lim_{s\to+\infty} u(sX)] = \mathbb{P}(X = 0)$.

L'application – à ω fixé – $s \longmapsto u\left[sX(\omega)\right]$ est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\forall s>0, \qquad \frac{\partial}{\partial s} u[sX(\omega)] = -\frac{|X(\omega)|}{(1+s|X(\omega)|)^2}.$$

Remarquons, que pour tout $a>0$,

$$\sup_{s\geq a}\left|\frac{\partial}{\partial s} u[sX(\omega)]\right| = \sup_{s\geq a}\frac{1}{s}\frac{s|X(\omega)|}{(1+s|X(\omega)|)^2} \leq \frac{1}{a}.$$

Le majorant précédent est intégrable : u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>0$ donc sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall s>0, \qquad \theta'(s) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial s}u(sX)\right] = -\,\mathbb{E}\left[\frac{|X|}{(1+s|X|)^2}\right].$$

2. On a, pour tout $s\geq 0$,

$$\theta(s) = \int_0^1 \frac{1}{1+s(u-c)^+}\,du = c + \int_c^1 \frac{1}{1+s(u-c)}\,du = c + \frac{1}{s}\ln\left[1+s(1-c)\right].$$

Par conséquent, $\theta(s) \longrightarrow c$ si $s\to+\infty$. Or $\mathbb{P}\left((U-c)^+=0\right) = \mathbb{P}(U\leq c) = c$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ c'est à dire de densité $p(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^{-1}$.

Correction. Puisque X possède une densité, $\mathbb{P}(X=0)=0$; la définition de X^{-1} ne pose aucune difficulté. Soit $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction borélienne et positive. On a

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \int_{\mathbf{R}^*} f\left(x^{-1}\right)\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Le changement de variable $y = x^{-1}$ – $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de $\mathbf{R}^*$ dans lui-même – donne

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_{\mathbf{R}^*} f(y)\,\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\,dy\ ;$$

Y suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.

Exercice 9. Soit X une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\alpha>0$. Quelle est la loi de $1+[X]$? ($[x]$ désigne la partie entière de x)

Exercice 10. Soit X de loi géométrique de paramètre $0<p<1$. On construit une v.a. Y en posant $Y(\omega) = X(\omega)/2$ si $X(\omega)$ est pair, $Y(\omega) = (1+X(\omega))/2$ si $X(\omega)$ est impair.

Déterminer la loi de la v.a. Y.

Exercice 11. Soit $U=(X,Y)$ une v.a. dans $\mathbf{R}^2$ de densité $(x,y)\longmapsto ke^{-x}\mathbf{1}_{0<|y|<x}$.

1. Quelle est la valeur de k ?
2. Déterminer les lois marginales.
3. Quelle est la loi du vecteur $(\frac{X-Y}{2},\frac{X+Y}{2})$?

Exercice 12. Soit (U,V) une v.a. dans $\mathbf{R}^2$ de densité $\mathbf{1}_{]0,1[}(u)\mathbf{1}_{]0,1[}(v)$.

1. Déterminer la loi du vecteur (X,Y) où $X=\sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V)$, $Y=\sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V)$.
2. Quelle est la loi de X/Y ?
3. On note $R=\sqrt{X^2+Y^2}$. Déterminer la loi de $(X/R,R)$.

Exercice 13. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F. Calculer $\mathbb{E}[F(X)]$.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F donnée par $F(t) = [t]/(1+[t])$ si $t \geq 0$, $F(t) = 0$ si $t < 0$.

Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbb{P}(X = n)$. Calculer $\mathbb{P}(1 < X \leq 3)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$ et $\mathbb{P}(X < 12)$. X possède-t-elle une densité ? X est-elle intégrable ?

Exercice 15. Soit F la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad F(t) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{i},+\infty[}(t).$$

1. Montrer que F est une fonction de répartition.
2. Soit X une var de fonction de répartition F.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X \leq 0)$, $\mathbb{P}(X \geq 1)$, $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{P}(0 \leq X < \frac{1}{2})$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la var $Y = 1/X$. Y est-elle intégrable ?

2. Indépendance

Exercice 16. Soient $X_0, \ldots, X_n$ $n+1$ v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées ; soit N une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ indépendante de $X_0, \ldots, X_n$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \sum_{k=0}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

Exprimer la fonction caractéristique de Y en fonction de celle de X_1

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note Y et Z le quotient et le reste de la division euclidienne de $X+2$ par 3.

Quelles sont les valeurs prises par les variables Y et Z ? Déterminer les lois de ces deux variables ? Sont-elles indépendantes ?

Exercice 18. Soient X et Y deux v.a. indépendantes ; X de loi géométrique de paramètre p, Y de loi géométrique de paramètre p'. Déterminer la loi de $Z = \min(X,Y)$.

Exercice 19. Soient X une variable aléatoire réelle et N suivant la loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$; X et N indépendantes. On considère la variable aléatoire $U = X^N$ ($U = 1$ si $N = 0$). On note $G(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

1. Montrer que U est intégrable si et seulement si $\mathbb{E}\left[e^{\alpha|X|}\right] < +\infty$.
2. Dans ce cas, exprimer $\mathbb{E}[U]$ en fonction de G.
3. Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, montrer que U est intégrable et calculer $\mathbb{E}[U]$.

Exercice 20. Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées. On pose $U = \min(X,Y)$, $V = X - Y$.

1. Déterminer la fonction de répartition de U (resp. de $\max(X,Y)$).
2. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Quelle est la loi de (U,V) ? U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 21. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes.

1. Montrer que si $X+Y$ est intégrable alors X et Y le sont.
2. Montrer que si $X+Y$ est presque sûrement constante alors X et Y le sont également.

Exercice 22. Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes.

1. On suppose que X suit la loi de Cauchy de paramètre $\alpha > 0$ et que Y suit celle de Cauchy de paramètre $\beta > 0$. Quelle est la loi de $X+Y$?

   Si $\alpha = \beta$, montrer que, pour tous a et b positifs, $aX + bY$ a la même loi que $(a+b)X$.

2. On suppose que X et Y suivent la même loi symétrique – i.e. X et $-X$ ont même loi – et que $aX + bY$ a la même loi que $(a+b)X$ pour tous a et b positifs.

   Montrer que si X n'est pas presque sûrement constante alors X suit une loi de Cauchy.

Correction. Rappelons que φ désigne la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X symétrique et qui n'est pas presque sûrement constante.

Nous avions établi que φ était réelle paire et qu'elle vérifiait

$$\forall (u,v) \in]0,+\infty[, \qquad \varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi(v).$$

Pour tout $u > 0$, $\varphi(u) = \varphi(u/2 + u/2) = \varphi(u/2)^2$ et donc φ est une fonction positive. On obtient facilement par récurrence que, pour tout $u > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\varphi(nu) = \varphi(u)^n$. En particulier, $\varphi(n) = \varphi(1)^n$. Soit $r > 0$ un rationnel. On a $r = p/q$ avec $p \in \mathbf{N}^*$, $q \in \mathbf{N}^*$ et

$$\varphi(1)^p = \varphi(p) = \varphi(qr) = \varphi(r)^q. \tag{2}$$

Si $\varphi(1) = 0$, alors $\varphi(r) = 0$ pour tout rationnel $r > 0$. Par continuité de φ – une fonction caractéristique est uniformément continue – $1 = \varphi(0) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(n^{-1}) = 0$. Ceci est impossible. Donc $\varphi(1) > 0$. On a alors via (2), pour tout rationnel $r > 0$, $\varphi(r) = \varphi(1)^r$. Les fonctions φ et $t \mapsto \varphi(1)^t$ étant continues et les rationnels denses, on obtient $\varphi(t) = \varphi(1)^t$ pour tout $t \geq 0$ et par parité, notant $c = -\ln \varphi(1)$,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \varphi(t) = \varphi(1)^{|t|} = e^{-c|t|}.$$

Ceci est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Cauchy de paramètre c si nous parvenons à montrer que $c > 0$. Or nous savons que $\varphi(1) > 0$ et que $|\varphi(t)| \leq 1$ puisque c'est une fonction caractéristique. Donc $c \geq 0$. Reste à voir que $c \neq 0$. Si $c = 0$ alors $\varphi(t) = 1$ pour tout t ; or $1 = \widehat{\delta_0}(t)$. $c = 0$ implique donc que X a pour loi δ_0 ce qui signifie que $X = 0$ presque sûrement : ceci est exclu par l'énoncé.

Exercice 23. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes, de carré intégrable et de même loi. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \sigma^2(X_1)$. On définit par récurrence :

$$Y_1 = X_1/2, \qquad Y_n = (Y_{n-1} + X_n)/2, \quad n \geq 2.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[Y_n]$ et $\mathbb{V}(Y_n)$ en fonction de n, m et σ^2.
2. Si X_1 suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, quelle est la loi de Y_n ?

Exercice 24. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi μ et B un borélien de $\mathbf{R}$ tel que $0 < \mu(B) < 1$.

On note τ_1 le temps d'entrée dans B c'est à dire

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \tau_1(\omega) = \inf\{n > 0 : X_n(\omega) \in B\} \quad \text{avec } \inf \emptyset = +\infty.$$

1. (a) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, expliciter les événements $\{\tau_1 = k\}$ et $\{\tau_1 > k\}$.
   (b) τ_1 est-il fini presque sûrement ? Déterminer la loi de τ_1.
   (c) On s'amuse à lancer un dé équilibré. En moyenne :
      – combien de lancers sont nécessaires pour l'obtention d'un 6 ?
      – quel est le total des points jusqu'au premier 6 ?
2. On pose $\tau_0 = 0$ et pour $k \in \mathbf{N}$

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \tau_{k+1}(\omega) = \inf\{i > \tau_k(\omega),\ X_i(\omega) \in B\}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, τ_k est fini presque sûrement.
   (b) Montrer que les variables $(\tau_{k+1} - \tau_k)_{\mathbf{N}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 25. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $0 < p < 1$ On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\sigma(\omega) = \inf\{i \geq 1,\ X_i(\omega) = 0\}, \qquad \tau(\omega) = \inf\{i \geq 1,\ X_i(\omega) = 1\},$$

avec la convention $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\tau = +\infty) = \mathbb{P}(\sigma = +\infty) = 0$ et déterminer la loi de σ et τ.
2. On définit, pour $\omega \in \Omega$, $T(\omega) = \inf\{i \geq 2,\ X_{i-1}(\omega) = 0,\ X_i(\omega) = 1\}$ avec la même convention.

   (a) Montrer que $T \geq \sigma + 1$ et que $T(\omega) = \inf\{i > \sigma(\omega),\ X_i(\omega) = 1\}$. En déduire que $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$.

   (b) Montrer que, si $k \geq 2$, $\{T = k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1}\{T = k\} \cap \{\sigma = i\}$. En déduire la loi de T : pour $k \geq 2$, notant $q = 1 - p$,

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{pq}{q-p}(q^{k-1} - p^{k-1}) \quad \text{si } p \neq q.$$

Déterminer la série génératrice de T ainsi que sa moyenne.

Exercice 26. Soient $(\mathcal{F}_n)_{\mathbf{N}}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$ et $(\alpha_r)_{\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs tendant vers 0. On suppose que

$$\forall r \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{F}_i,\ i \leq n),\ \forall B \in \sigma(\mathcal{F}_i,\ i > n + r), \quad |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \alpha_r.$$

Montrer que, pour tout événement asymptotique de $\mathcal{F}_n$, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

Exercice 27. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On note, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Les événements

$$\{X_n \longrightarrow 0\}, \quad \{\limsup X_n < +\infty\}, \quad \{\limsup S_n < +\infty\}, \quad \left\{n^{-1}S_n \text{ converge dans } \mathbf{R}\right\},$$

$$\limsup\{S_n = 0\}, \quad \{(S_n)_{n\geq 1} \text{ converge dans } \mathbf{R}\}, \quad \{(S_n)_{n\geq 1} \text{ converge vers } S \leq c\}$$

sont-ils des événements asymptotiques de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 28. Soit $(X_n)_{\mathbf{N}}$ une suite de v.a.r. identiquement distribuées.

1. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $c > 0$.
   (a) Montrer que si $\mathbb{E}\left[[X_0|^p\right] < +\infty$ alors $\mathbb{P}\left(\limsup\left\{|X_n| > cn^{1/p}\right\}\right) = 0$.
   (b) Montrer la réciproque dans le cas indépendant.

   On suppose désormais les $(X_n)_{\mathbf{N}}$ indépendantes.

2. Montrer que si $\mathbb{P}(X_0 \neq 0) > 0$ alors $\sum_n |X_n| = +\infty$ $\mathbb{P}$–p.s.

3. On se propose d'étudier le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n X_n z^n$. On suppose que $\mathbb{P}(X_0 \neq 0) > 0$.

(a) Montrer à l'aide de la question précédente que $R \leq 1$ $\mathbb{P}$–p.s.

(b) En utilisant la première question, montrer que si $\mathbb{E}\left[\ln^+(|X_0|)\right] < +\infty$ alors $R = 1$ $\mathbb{P}$–p.s. et que dans le cas contraire $R = 0$ $\mathbb{P}$–p.s.

(c) Pouvait-on prévoir que R était presque sûrement constant ?

3. Convergence de variables aléatoires

Exercice 29. Soit $(f_n)_{\mathbf{N}}$ la suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ définie comme suit : $f_n(x) = 2^n$ s'il existe un entier k tel que $2^{-n}k \leq x < 2^{-n}k + 2^{-2n}$, $f_n(x) = 0$ dans le cas contraire. Montrer que $(f_n)_{\mathbf{N}}$ converge vers 0 presque partout.

Exercice 30. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes toutes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Montrer que, presque sûrement,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{\ln n} = 1.$$

Correction. Notons, pour $n \geq 1$, $U_n = X_n/\ln n$. $\limsup U_n$ est une variable aléatoire asymptotique de la suite de $(X_n)_{n\geq 1}$; ces v.a. sont indépendantes : la loi du tout ou rien de Kolmogorov implique que $\limsup U_n$ est presque sûrement constante. Notons c cette constante ; $c \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

Nous utiliserons à maintes reprises le point suivant : pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{P}(X_1 > \lambda) = e^{-\lambda}$.

Les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ étant identiquement distribuées, on a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n \geq \ln n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty,$$

et puisqu'elles sont également indépendantes, $\mathbb{P}\left(\limsup\{U_n \geq 1\}\right) = 1$ d'après le lemme de Borel-Cantelli. Presque sûrement, il y a une infinité d'entiers n tels que $U_n \geq 1$: $c \geq 1$.

De la même façon, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > (1+\varepsilon)\ln n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty\ ;$$

donc $\mathbb{P}\left(\limsup\{U_n > (1+\varepsilon)\}\right) = 0$ soit encore $\mathbb{P}\left(\liminf\{U_n \leq (1+\varepsilon)\}\right) = 1$. Presque sûrement, il existe $r \geq 1$ (r dépend de ω) tel que, pour tout $n \geq r$, $U_n \leq (1+\varepsilon)$: donc $c \leq 1+\varepsilon$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$ on a $c \leq 1$ et donc $c = 1$.

Soit $r \geq 1$. Pour tout $n \geq r$, on a, les variables étant positives,

$$\frac{\max_{r<k\leq n} X_k}{\ln n} \leq \frac{Y_n}{\ln n} \leq \frac{\max_{k\leq r} X_k}{\ln n} + \frac{\max_{r<k\leq n} X_k}{\ln n}. \tag{3}$$

Or la suite $\left(\max_{k\leq r} X_k/\ln n\right)_{n\geq 1}$ décroît vers 0, donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\max_{r<k\leq n} X_k}{\ln n} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{\ln n}, \qquad \liminf_{n\to+\infty} \frac{\max_{r<k\leq n} X_k}{\ln n} = \liminf_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{\ln n}\ ;$$

$\limsup Y_n/\ln n$ et $\liminf Y_n/\ln n$ sont deux v.a. asymptotiques de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$: elles sont donc presque sûrement constantes disons égales à c^* et c_* respectivement.

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $\omega \in \liminf\{X_n \leq (1+\varepsilon)\ln n\}$. Il existe $r_\omega \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq r_\omega$, $X_n(\omega) \leq (1+\varepsilon)\ln n$. On a alors via (3), $c^* \leq 1+\varepsilon$

De plus, les v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ étant i.i.d., nous avons

$$\mathbb{P}(Y_n < (1-\varepsilon)\ln n) = \mathbb{P}\left(X_1 < (1-\varepsilon)\ln n\right)^n = \left(1 - e^{-(1-\varepsilon)\ln n}\right)^n \leq e^{-n^\varepsilon},$$

qui est le terme général d'une série convergente. D'où $\mathbb{P}\left(\liminf\{Y_n \geq (1-\varepsilon)\ln n\}\right) = 1$ d'après le lemme de Borel–Cantelli : presque sûrement, il existe r tel que, pour tout $n \geq r$, $Y_n/\ln n \geq 1-\varepsilon$; par suite $c_* \geq 1-\varepsilon$.

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, $1-\varepsilon \leq c_* \leq c^* \leq 1+\varepsilon$: $c_* = c^* = 1$.

Exercice 31. Soit, pour $n \geq 1$, X_n une v.a.r. de Cauchy de paramètre 3^{-n}. On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement dans $\mathbf{R}$. Déterminer la loi de la limite lorsque les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.

Correction. Rappelons tout d'abord que si X suit la loi de Cauchy de paramètre $c > 0$, on a, par parité et via $x = cy$, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| > a) = \frac{1}{\pi}\int_{|x|>a} \frac{c}{x^2+c^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{a}{c}}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(a/c)\right) = \frac{2}{\pi}\arctan(c/a).$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(|X_n| > 2^{-n}\right) = \frac{2}{\pi}\arctan(2^n/3^n) \sim \frac{2}{\pi}\frac{2^n}{3^n}.$$

Le lemme de Borel–Cantelli donne $\mathbb{P}\left(\limsup\{|X_n| > 2^{-n}\}\right) = 0$ et, en passant au complémentaire, $\mathbb{P}\left(\liminf\{|X_n| \leq 2^{-n}\}\right) = 1$. Or, si $\omega \in \liminf\{|X_n| \leq 2^{-n}\}$, la série $\sum X_n(\omega)$ est absolument convergente puisqu'à partir d'un certain rang r $|X_n(\omega)| \leq 2^{-n}$. D'où la convergence presque sûre de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 1}$.

Plaçons nous dans le cas indépendant et notons S la limite. On a alors, pour tout réel t, via l'indépendance des $(X_n)_{n\geq 1}$,

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod\nolimits_{1\leq k\leq n} \varphi_{X_k}(t) = \prod\nolimits_{1\leq k\leq n} e^{-3^{-k}|t|} = \exp\left\{-|t|\sum\nolimits_{1\leq k\leq n} 3^{-k}\right\}.$$

Par conséquent, pour tout t, $\varphi_{S_n}(t)$ converge vers $e^{-|t|/2}$ qui est la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre $1/2$.

D'un autre côté, pour tout t, e^{itS_n} converge presque sûrement vers e^{itS} et puisque $|e^{itS_n}| \leq 1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour obtenir

$$\varphi_S(t) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{S_n}(t) = e^{-|t|/2}.$$

S suit la loi de Cauchy de paramètre $1/2$.

Exercice 32. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, X et Y des variables aléatoires réelles ; $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers X en probabilité.

1. On suppose dans cette question que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|X_n| \leq Y$ presque sûrement.
   (a) Montrer que $|X| \leq Y$ presque sûrement.
   (b) Montrer que si Y est bornée $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers X dans L^p pour tout réel $p \geq 1$.
   (c) On suppose que $Y \in \mathrm{L}^p$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers X dans L^p.
2. Montrer que $\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf \mathbb{E}[|X_n|]$.
   `Indic.` : Si $x \geq 0$ et $r \geq 0$, $x \geq \min(x, r)$.

Exercice 33 (Difficile !)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. numériques. On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est *équi-intégrable* si

$$\lim_{a\to+\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|>a}\right]=0. \tag{4}$$

1. (a) Montrer qu'une v.a. intégrable est équi-intégrable.

(b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable dans les deux cas suivants :

(i) il existe une v.a. Y intégrable telle que, pour tout n, $|X_n|\leq Y$ presque sûrement ;

(ii) $(X_n)_{\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ pour $p>1$.

(c) En déduire qu'un nombre fini de v.a. intégrables est équi-intégrable.

(d) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable si et seulement si

$$\lim_{a\to+\infty}\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[(|X_n|-a)^+\right]=0.$$

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}\subset \mathrm{L}^1$ et X une variable aléatoire. Montrer que la suite $(X_n)_{\mathbf{N}}$ converge vers X dans L^1 si et seulement si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X et $(X_n)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable.

`Indic` : $\mathbb{E}[|X_n-X|]=\mathbb{E}[\min(|X_n-X|,a)]+\mathbb{E}\left[(|X_n-X|-a)^+\right]$; $x\longmapsto (x-a)^+$ est convexe et croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 34. Soit $f:\mathbf{R}_+\longrightarrow\mathbf{R}_+$ une fonction continue, strictement croissante et bornée telle que $f(0)=0$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X en probabilité ;

(ii) $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[f(|X_n-X|)\right]=0$.

En pratique : $f(x)=\min(x,1)$ *ou* $f(x)=x/(1+x)$.

Correction. Soit $f:]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ une fonction croissante, bornée telle que $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$.

Supposons dans un premier temps que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X en probabilité. Nous avons, pour tout $\varepsilon>0$, f étant croissante, positive et bornée

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(|X_n-X|)\right] &= \mathbb{E}\left[f(|X_n-X|)\mathbf{1}_{|X_n-X|>\varepsilon}\right]+\mathbb{E}\left[f(|X_n-X|)\mathbf{1}_{|X_n-X|\leq\varepsilon}\right]\\ &\leq \|f\|_\infty\,\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)+f(\varepsilon),\end{aligned}$$

de sorte que $\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[f(|X_n-X|)\right]\leq f(\varepsilon)$; cette dernière inégalité conduit au résultat puisque $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$.

Réciproquement, pour tout $\varepsilon>0$, f étant croissante et positive,

$$f(\varepsilon)\,\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)\leq\mathbb{E}\left[f(|X_n-X|)\mathbf{1}_{|X_n-X|>\varepsilon}\right]\leq\mathbb{E}\left[f(|X_n-X|)\right]\ ;$$

ce qui donne le résultat comme $f(\varepsilon)>0$.

Exercice 35 (Lemme de Scheffé)**.** Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}\subset\mathrm{L}^1$ et X des v.a.r. positives. On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers X en probabilité. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers X dans L^1 si et seulement si X est intégrable et $\mathbb{E}[X_n]\longrightarrow\mathbb{E}[X]$.

Exercice 36. Soit X une variable aléatoire de loi donnée par $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=1/2$. On définit $X_n=X$ si n est pair, $X_n=-X$ si n est impair et $Y_n=X$ pour tout n. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers X puis que la suite des couples (X_n,Y_n) ne converge pas en loi.

Exercice 37. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et X des variables à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers X en loi ;

(ii) pour tout $k\in\mathbf{N}$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}(X=k)$;

(iii) G_{X_n} converge simplement vers G_X sur $[0,1]$.

Exercice 38. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, X des v.a.r. et D une partie dense de $\mathbf{R}$. On suppose que $F_{X_n}(t)$ converge vers $F_X(t)$ pour tout $t\in D$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers X en loi.

Correction. Soit $t\in\mathbf{R}$. Puisque D est dense dans $\mathbf{R}$, il existe une suite strictement croissante de points de D, disons $(p_k)_{k\geq 1}$, qui converge vers t. De même, il existe une suite strictement décroissante de points de D, $(q_k)_{k\geq 1}$, qui converge vers t. Pour tout $k\geq 1$, $p_k<t<q_k$.

Pour tout $n\geq 1$, F_{X_n} est croissante de sorte que, que pour tout $k\geq 1$,

$$F_{X_n}(p_k)\leq F_{X_n}(t)\leq F_{X_n}(q_k).$$

En particulier, pour tout $k\geq 1$,

$$F_X(p_k)=\liminf_{n\to+\infty}F_{X_n}(p_k)\leq\liminf_{n\to+\infty}F_{X_n}(t),\qquad \limsup_{n\to+\infty}F_{X_n}(t)\leq\limsup_{n\to+\infty}F_{X_n}(q_k)=F_X(q_k).$$

F_X est continue à droite donc $\lim_{k\to+\infty}F_X(q_k)=F_X(t)$ et d'autre part, $\lim_{k\to+\infty}F_X(p_k)=F_X(t-)$. Par conséquent,

$$F_X(t-)\leq\liminf_{n\to+\infty}F_{X_n}(t)\leq\limsup_{n\to+\infty}F_{X_n}(t)\leq F_X(t).$$

Si donc F_X est continue au point t, $F_{X_n}(t)$ converge vers $F_X(t)$: $(X_n)_{n\geq 1}$ converge donc en loi vers X.

Exercice 39. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, Y_n est une v.a. de loi géométrique de paramètre α/n où $\alpha>0$ et $X_n=Y_n/n$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une v.a. X de loi exponentielle de paramètre α.

Correction. Rappelons que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p\in]0,1[$, est

$$\theta_p(t)=\frac{p\,e^{it}}{1-(1-p)\,e^{it}}=\frac{p}{e^{-it}-1+p}.$$

On a, pour tout réel $t\in\mathbf{R}$,

$$\varphi_{X_n}(t)=\mathbb{E}\left[e^{it\frac{Y_n}{n}}\right]=\varphi_{Y_n}(t/n)=\theta_{\frac{\alpha}{n}}(t/n)=\frac{\frac{\alpha}{n}}{e^{-i\frac{t}{n}}-1+\frac{\alpha}{n}},$$

et, puisque $e^z=1+z+z\varepsilon(z)$ avec $\lim_{z\to 0}\varepsilon(z)=0$,

$$\varphi_{X_n}(t)=\frac{\frac{\alpha}{n}}{-i\frac{t}{n}-i\frac{t}{n}\,\varepsilon(-i\frac{t}{n})+\frac{\alpha}{n}}=\frac{\alpha}{\alpha-it-it\,\varepsilon(-it/n)}.$$

Par conséquent,

$$\forall t\in\mathbf{R},\qquad \lim_{n\to+\infty}\varphi_{Y_n}(t)=\frac{\alpha}{\alpha-it}$$

qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre α. D'après le théorème de Paul Lévy, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X de loi $\mathcal{E}(\alpha)$.

Exercice 40. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et X des v.a.r. de densité respectives p_n et p. Montrer que si p_n converge vers p dans L^1 alors X_n converge vers X en loi. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 41. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et X des variables à valeurs dans $\{0\}\cup\{k^{-1} : k\in\mathbf{N}^*\}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers X si et seulement si,

$$\forall k\in\mathbf{N}^*, \qquad \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(X_n=k^{-1}\right)=\mathbb{P}\left(X=k^{-1}\right).$$

2. A-t-on $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=0)=\mathbb{P}(X=0)$?

Correction. Soient $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ une fonction mesurable, positive ou bornée, et Y une v.a.r. à valeurs dans $A=\{0\}\cup\{p^{-1},\ p\in\mathbf{N}^*\}$; on a :

$$\mathbb{E}[f(Y)]=f(0)\,\mathbb{P}(Y=0)+\sum\nolimits_{p\geq 1} f\left(p^{-1}\right)\,\mathbb{P}\left(Y=p^{-1}\right). \tag{5}$$

1. Si X_n à valeurs dans A converge en loi vers X aussi à valeurs dans A, alors, pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbf{R}$, $\mathbb{E}[f(X_n)]\longrightarrow\mathbb{E}[f(X)]$. Soient $k\in\mathbf{N}^*$ et f_k la fonction

On a alors d'après la formule (5),

$$\mathbb{E}[f_k(X_n)]=\mathbb{P}\left(X_n=k^{-1}\right), \qquad \mathbb{E}\left[f_k(X)\right]=\mathbb{P}(X=k)$$

et comme f_k est continue et bornée,

$$\mathbb{E}[f_k(X_n)]=\mathbb{P}\left(X_n=k^{-1}\right)\longrightarrow\mathbb{E}\left[f_k(X)\right]=\mathbb{P}(X=k).$$

Supposons maintenant que, pour tout $k\geq 1$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(X_n=k^{-1}\right)=\mathbb{P}\left(X=k^{-1}\right)$. Montrons que $F_{X_n}(t)$ converge vers $F_X(t)$ pour tout $t\in\mathbf{R}^*$. Pour $t<0$, $F_{X_n}(t)=F_X(t)=0$ et, pour $t\geq 1$, $F_{X_n}(t)=F_X(t)=1$. Soit $t\in]0,1[$. On a, via (5),

$$1-F_{X_n}(t)=\mathbb{P}(X_n>t)=\sum_{p\geq 1}\mathbf{1}_{]t,+\infty[}\left(p^{-1}\right)\mathbb{P}\left(X_n=p^{-1}\right)=\sum_{1\leq p<t^{-1}}\mathbb{P}\left(X_n=p^{-1}\right);$$

il s'agit d'une somme finie et donc

$$\lim_{n\to+\infty}(1-F_{X_n}(t))=\sum_{1\leq p<t^{-1}}\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(X_n=p^{-1}\right)=\sum_{1\leq p<t^{-1}}\mathbb{P}\left(X=p^{-1}\right)=1-F_X(t).$$

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$ pour tout $t\neq 0$. Comme $\mathbf{R}^*$ est dense dans $\mathbf{R}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X (cf. exercice 38).

Regardons quand même ce qui se passe pour $t=0$. On a, pour tout $t>0$, F_{X_n} étant croissante pour tout $n\in\mathbf{N}^*$,

$$F_X(-t)=\liminf F_{X_n}(-t)\leq\liminf F_{X_n}(0)\leq\limsup F_{X_n}(0)\leq\limsup F_{X_n}(t)=F_X(t).$$

Il s'en suit que, en faisant tendre t vers 0^+, comme F_X est continue à droite,

$$F_X(0-)\leq\liminf F_{X_n}(0)\leq\limsup F_{X_n}(0)\leq F_X(0)\ ;$$

si F_X est continue en 0, $F_{X_n}(0)$ tend vers $F_X(0)$. On a donc $\lim_{n\to+\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$ dès que F_X est continue en t. $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge donc en loi vers X.

2. La suite de variables constantes, $X_n=n^{-1}$, converge presque sûrement et donc en loi vers $X=0$. Par contre, $\mathbb{P}(X_n=0)=0$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ tandis que $\mathbb{P}(X=0)=1$.

Exercice 42. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi de Cauchy de paramètre $c > 0$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = (\max_{1\leq k\leq n} X_k)/n$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $1/T$ où T suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Correction. Rappelons que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X suivant la loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ est

$$F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{c}\right), \quad t \in \mathbf{R}.$$

D'autre part, si T est une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(T > 0) = 1$ et donc, pour $t > 0$,

$$F_{\frac{1}{T}}(t) = \mathbb{P}(1/T \leq t, T > 0) = \mathbb{P}(T \geq 1/t, T > 0) = \mathbb{P}(T \geq 1/t) = e^{-\frac{\lambda}{t}},$$

tandis que, pour $t \leq 0$, $F_{\frac{1}{T}}(t) = \mathbb{P}(1/T \leq t) = 0$.

Déterminons à présent la fonction de répartition de Y_n. Puisque les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. nous avons, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq nt\right) = \mathbb{P}(X_1 \leq nt, \ldots, X_k \leq nt) = \mathbb{P}(X_1 \leq nt)^n$$

soit

$$F_{Y_n}(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{nt}{c}\right)\right)^n.$$

Si $t \leq 0$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{nt}{c}) \leq \frac{1}{2}$ et $F_{Y_n}(t) \longrightarrow 0$. Si $t > 0$, comme $\arctan x = \pi/2 - \arctan(1/x)$ pour $x > 0$,

$$F_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{c}{nt}\right)\right)^n = \exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{c}{nt}\right)\right)\right\}.$$

Comme $\arctan x = x + \circ(x)$ si $x \to 0$, $F_{Y_n}(t) \longrightarrow e^{-\frac{c}{\pi t}}$ pour $t > 0$.

Par conséquent, la fonction de répartition de Y_n converge simplement vers la fonction de répartition de $1/T$ où T est une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre c/π et par suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $1/T$.

4. Loi des grands nombres ; séries de v.a.

Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables indépendantes, on note, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Exercice 43. Soient $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On note pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{U_i \leq x}, \quad M_n(x) = n^{-1} S_n(x), \qquad B_n(x) = \mathbb{E}\left[f(M_n(x))\right].$$

1. (a) Quelle est la loi de $S_n(x)$, sa moyenne, sa variance ?

   (b) Montrer que B_n est un polynôme.

2. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} B_n(x) = f(x)$.

(b) Établir l'inégalité

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall \eta > 0, \quad \mathbb{P}\left(|M_n(x) - x| > \eta\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \leq \frac{1}{4n\eta^2}.$$

(c) En déduire que $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers f uniformément sur $[0,1]$. On pourra remarquer que $|B_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}[|f(M_n(x)) - f(x)|]$ et utiliser l'inégalité précédente.

Exercice 44. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. telle que X_1 est intégrable. On note, pour $n \geq 1$, $M_n = n^{-1}S_n$.

1. Déterminer la fonction caractéristique de M_n.
2. En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers $m = \mathbb{E}[X_1]$.

Correction. 1. La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ étant i.i.d., on a, pour tout réel t,

$$\varphi_{M_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\frac{S_n}{n}}\right] = \mathbb{E}\left[\prod\nolimits_{k\leq n} e^{it\frac{X_k}{n}}\right] \overset{i.}{=} \prod\nolimits_{k\leq n} \varphi_{X_k}(t/n) \overset{i.d.}{=} \left(\varphi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

2. Puisque X_1 est intégrable, φ_{X_1} et de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'_{X_1}(0) = i\,\mathbb{E}[X_1] = im$; par suite,

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 + imt + t\,\varepsilon(t), \qquad \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0,$$

et donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\varphi_{M_n}(t) = \left(1 + im\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\,\varepsilon(t/n)\right)^n.$$

Rappelons (cf. cours) que, si $nz_n \longrightarrow z$ (tout est dans $\mathbf{C}$) $\lim_{n\to+\infty}(1+z_n)^n = e^z$. Il vient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{M_n}(t) = e^{itm},$$

qui est la fonction caractéristique de la constante m. M_n converge donc en loi vers m. La limite étant constante la convergence a lieu également en probabilité. On a donc bien la loi faible des grands nombres.

Exercice 45. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} X_n n^{-1} \sin(n\pi x)$ converge presque sûrement pour tout réel x.

Correction. La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est i.i.d. ; X_1 est de carré intégrable, $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$. On a

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[n^{-2}\, X_n^2\, \sin^2(n\pi t)\right] = \sum_{n\geq 1} n^{-2}\, \sin^2(n\pi t)\; \mathbb{E}\left[X_1^2\right] \leq \sum_{n\geq 1} n^{-2} < +\infty.$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat sur les séries centrées.

Exercice 46. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$I_n = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Correction. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, $(U_1,\dots,U_n)$ a pour densité (par indépendance) la fonction

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x_1)\dots\mathbf{1}_{[0,1]}(x_n),$$

de sorte que $I_n = \mathbb{E}[f(S_n/n)]$ avec $S_n = U_1+\cdots+U_n$.

D'après la loi forte des grands nombres, la suite de terme général S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[U_1] = 1/2$ et comme f est continue $f(S_n/n)$ converge presque sûrement vers $f(1/2)$. Puisque f est bornée (continue sur un compact), cette dernière convergence a lieu également dans L^1 ; par conséquent,

$$I_n = \mathbb{E}[f(S_n/n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(1/2)] = f(1/2).$$

Exercice 47. 1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes de carré intégrable et $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. On suppose que

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] \longrightarrow m, \qquad \sum_{n\geq 1} b_n^{-2}\mathbb{V}(X_n) < +\infty.$$

Montrer que $(b_n^{-1}S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers m presque sûrement et dans L^2.

2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants telle que $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. On note, pour $n \geq 1$, $b_n = \sum_{1\leq k\leq n}\mathbb{P}(A_k)$. Montrer que la suite $\left(b_n^{-1}\sum_{1\leq k\leq n}\mathbf{1}_{A_k}\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 1.

Exercice 48. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes, intégrables et centrées. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable cf. (4).

Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité puis dans L^1.

`Indic :` $Y_n = X_n\mathbf{1}_{|X_n|>a}$.

5. Autour du TCL

Exercice 49. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On note $S_n = X_1+\ldots+X_n$.

1. (a) Quelle est la loi de S_n ?

(b) Montrer que $Z_n = (S_n - n)/\sqrt{n}$ converge en loi vers une gaussienne centrée réduite.

(c) Plus généralement, si S_λ suit la loi de Poisson de paramètre λ, montrer que $(S_\lambda-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ converge en loi, lorsque $\lambda\to+\infty$ vers une gaussienne centrée réduite.

2. (a) Montrer que

$$\forall t>0, \qquad \mathbb{P}(Z_n > t) \leq t^{-2}.$$

(b) En déduire que $\mathbb{E}\left[Z_n^+\right]$ converge vers $\mathbb{E}\left[G^+\right]$ où G est gaussienne centrée réduite.

(c) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[Z_n^+\right] = \frac{e^{-n}n^n\sqrt{n}}{n!}.$$

(d) Retrouver la formule de Stirling.

Correction. Rappelons que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$ est $\psi_\alpha(t) = \exp\left\{\alpha\left(e^{it}-1\right)\right\}$.

1. (a) La suite étant i.i.d., nous avons

$$\varphi_{S_n}(t) = (\varphi_{X_1}(t))^n = \psi_1(t)^n = \exp\{n(e^{it}-1)\} = \psi_n(t).$$

S_n suit la loi de Poisson de paramètre n.

(b) Un calcul élémentaire donne

$$Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - 1\right).$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est i.i.d., X_1 est de carré intégrable et $\mathbb{E}[X_1] = 1$, $\mathbb{V}(X_1) = 1$. D'après le TCL, $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. G de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(c) Posons $Z_\lambda = (S_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$. On a

$$\varphi_{Z_\lambda}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\frac{S_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right] = e^{-it\sqrt{\lambda}}\,\mathbb{E}\left[e^{it\frac{S_\lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right] = e^{-it\sqrt{\lambda}}\,\psi_\lambda\left(t/\sqrt{\lambda}\right) = e^{-it\sqrt{\lambda}}\exp\left\{\lambda\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right)\right\}.$$

On a $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + z^2\,\varepsilon(z)$ avec $\varepsilon(z) \longrightarrow 0$ si $z \to 0$ et

$$\begin{aligned}\exp\left\{\lambda\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} - 1\right)\right\} &= \exp\left\{\lambda\left(i\frac{t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2}{2\lambda} - \frac{t^2}{\lambda}\,\varepsilon\left(it/\sqrt{\lambda}\right)\right)\right\}\\ &= \exp\left\{it\sqrt{\lambda} - \frac{t^2}{2} - t^2\,\varepsilon\left(it/\sqrt{\lambda}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout réel t,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi_{Z_\lambda}(t) = \lim_{\lambda\to+\infty}\exp\left\{-\frac{t^2}{2} - t^2\,\varepsilon\left(it/\sqrt{\lambda}\right)\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$$

qui est la fonction caractéristique d'une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. D'après le théorème de Paul Lévy, Z_λ converge en loi vers une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2. (a) Rappelons que si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$, $\mathbb{E}[X] = \alpha$ et $\mathbb{V}(X) = \alpha$. Si $t > 0$, l'inégalité de Tchebycheff donne

$$\mathbb{P}(Z_n > t) = \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] > t\sqrt{n}) \le \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > t\sqrt{n}) \le \frac{\mathbb{V}(S_n)}{t^2 n} = \frac{1}{t^2}.$$

(b) Puisque Z_n^+ est une v.a.r. positive,

$$\mathbb{E}\left[Z_n^+\right] = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}\left(Z_n^+ > t\right)dt = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n > t)\,dt.$$

Comme nous l'avons vu à la première question, Z_n converge en loi vers une v.a.r. G de loi $\mathcal{N}(0,1)$. F_G est continue sur $\mathbf{R}$ et donc $F_{Z_n}(t)$ converge vers $F_G(t)$ pour tout réel t. Par conséquent, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(Z_n > t) = 1 - F_{Z_n}(t) \longrightarrow 1 - F_G(t) = \mathbb{P}(G > t)$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t > 0$, $0 \le \mathbb{P}(Z_n > t) \le \min\left(1, t^{-2}\right)$. La fonction $t \longmapsto \min\left(1, t^{-2}\right)$ étant intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, +\infty[$, on obtient par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[Z_n^+\right] = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(Z_n > t)\,dt = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(G > t)\,dt = \mathbb{E}\left[G^+\right].$$

(c) Pour toute fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ borélienne, positive ou bornée, comme S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$,

$$\mathbb{E}\left[f(Z_n)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \sum_{k\ge 0} f\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right)e^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}\left[Z_n^+\right] = \sum_{k\geq 0}\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right)^+ e^{-n}\frac{n^k}{k!} = e^{-n}\sum_{k\geq n+1}\frac{k-n}{\sqrt{n}}\frac{n^k}{k!} = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{n^k}{(k-1)!}-\frac{n^{k+1}}{k!}\right).$$

La série de terme général $u_k = n^{k+1}/k!$ est convergente puisque $u_{k+1}/u_k = n/(k+1) \longrightarrow 0$ si $k\to+\infty$. Notons R_p le reste d'ordre p soit $R_p = \sum_{k\geq p} u_k$. On a alors

$$\mathbb{E}\left[Z_n^+\right] = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left(R_n - R_{n+1}\right) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}u_n = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\frac{n^{n+1}}{n!} = \frac{e^{-n}n^n\sqrt{n}}{n!}.$$

(d) Pour finir, remarquons que,

$$\mathbb{E}\left[G^+\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[Z_n^+\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-n}n^n\sqrt{n}}{n!} = \mathbb{E}\left[G^+\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

soit encore

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}\,n^n}{n!} = 1.$$

Lorsque $n\to+\infty$, un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}\,n^n$. C'est la formule de Stirling.

Exercice 50. On observe des particules dont la durée de vie X est une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

1. Calculer la probabilité pour qu'une particule déterminée n'existe plus à l'instant $t > 0$.

2. n particules sont dans une enceinte close ; leurs durées de vie sont indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\theta)$. On désigne par N_t le nombre de particules qui ne sont pas désintégrées à l'instant t. Quelle est la loi de N_t ? Calculer la moyenne et la variance de N_t. Étudier $\mathbb{V}[N_t]$ en fonction de t.

3. Soit $0 < \alpha < 1$. Étudier $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(N_t > \alpha n)$. Si $t_0 = \ln(2)/\theta$, que vaut $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(N_{t_0} > n/2)$?

Exercice 51. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite v.a.r. i.i.d. suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Peut-on appliquer le TCL ?

Trouver la loi de M_n. Pensez-vous que $(\sqrt{n}M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi ?

Exercice 52. Soit (P) la propriété suivante :

Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes et de même loi μ, $(X+Y)/\sqrt{2}$ est aussi de loi μ.

1. Montrer que la loi $\mathcal{N}(0,1)$ vérifie (P).

2. Soit μ une probabilité sur $\mathbf{R}$ telle que $\int_{\mathbf{R}} x^2\,\mu(dx) = 1$ vérifiant (P).

   (a) Montrer que si X est de loi μ alors $\mathbb{E}[X] = 0$.

   (b) Montrer que, pour tout $n\geq 1$ et toute suite $X_1,\ldots,X_{2^n}$ i.i.d. de loi μ, la v.a.r.

$$Y_n = 2^{-\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{2^n} X_i$$

est de loi μ.

   (c) Montrer que $\mu = \mathcal{N}(0,1)$. Pensez au TCL !

Exercice 53 (Une autre démonstration du TCL)**.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. telle que $X_1 \in \mathrm{L}^3$; $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{V}(X_1) = 1$. Considérons d'autre part $(G_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

On note $T_n = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i$. Pour $k = 1, \ldots, n-1$, on note

$$U_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(X_1 + \ldots + X_k + G_{k+1} + \ldots + G_n\right), \quad U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n G_i, \quad U_n = T_n.$$

1. Quelle est la loi de U_0 ?
2. On pose, pour $k = 1, \ldots, n$, $V_k = U_k - X_k/\sqrt{n}$. Montrer que $V_k = U_{k-1} - G_k/\sqrt{n}$.
3. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction $\mathcal{C}^3$ dont la dérivée troisième est bornée.
   (a) En écrivant un développement de Taylor (pensez à V_k), montrer que

$$|\mathbb{E}[f(U_k)] - \mathbb{E}[f(U_{k-1})]| \leq \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}}$$

où c est une constante que l'on déterminera.

   (b) Soit G de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que

$$|\mathbb{E}[f(T_n)] - \mathbb{E}[f(G)]| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Commentaires ?

Exercice 54. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. intégrables et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue sur $\mathbf{R}$ et dérivable au point $m = \mathbb{E}[X_1]$.

Déterminer la limite en loi de la suite $(\sqrt{n}\,[f(M_n) - f(m)])_{n\geq 1}$.

`Indic :` $f(x) = f(m) + (x-m)f'(m) + (x-m)g(x)$ avec g continue et $\lim_{x\to m} g(x) = 0$.

6. Vecteurs gaussiens

Exercice 55. Loi du χ^2 Pour $s > 0$, $t > 0$,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx, \qquad B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\, dx.$$

1. Montrer que, pour $s > 0$, $t > 0$, $\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t)\, B(s,t)$, $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
2. Pour $\alpha > 0$ et $s > 0$, on note $\Gamma_{s,\alpha}$ la probabilité sur $\mathbf{R}$ de densité

$$\gamma_{s,\alpha}(x) = \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)}\, x^{s-1} e^{-\alpha x}\, \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x).$$

(a) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes ; X de loi $\Gamma_{s,\alpha}$, Y de loi $\Gamma_{t,\alpha}$. Quelle est la loi de $X+Y$?

(b) Soit $G_1, \ldots, G_d$ indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la densité de G_1^2 puis celle de $G_1^2 + \ldots + G_d^2$.

Exercice 56. 1. Soient $a > 0$ et X de loi $\mathcal{N}(0,1)$, $U = X\mathbf{1}_{|X|\leq a} - X\,\mathbf{1}_{|X|>a}$. Quelle est la loi de U ? Le couple (X,U) est-il gaussien ?

2. Soit ε de loi $\mathbb{P}(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$ indépendante de X. Loi de $Y = \varepsilon X$? Le couple (X,Y) est-il gaussien ?

Exercice 57. Soient $X_1,\dots,X_n$ n v.a.r. gaussiennes indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\overline{X}_n = n^{-1}(X_1+\ldots+X_n)$ et $W_n = \max_{1\le i\le n} X_i - \min_{1\le i\le n} X_i$ sont indépendantes.

Exercice 58 (Apprendre le cours)**.** Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^*$ un vecteur gaussien de moyenne $(1,0,3)^*$ et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{respectivement} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la fonction caractéristique de X ?
2. Quelles sont les lois marginales ? Déterminer les lois de (X_1, X_2), (X_1, X_3) et (X_2, X_3).
3. Est-ce que deux composantes de X sont indépendantes ?
4. X admet-il une densité ? Si oui la calculer.

Les lois usuelles

Si X est une variable aléatoire réelle, sa fonction de répartition est la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

Si X est à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, sa fonction caractéristique est donnée par

$$\forall t \in \mathbf{R}^d, \qquad \varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\cdot X}\right].$$

Lois discrètes

Notation : pour p élément de $[0,1]$, on note $q = 1 - p$.

Si X est à valeurs entières, sa fonction ou série génératrice est la série entière

$$\forall |z| \leq 1, \qquad G_X(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right].$$

On a alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \varphi_X(t) = G_X\left(e^{it}\right).$$

Loi de Bernoulli, $\mathcal{B}(p)$, $0 \leq p \leq 1$:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = q;$$

Loi binomiale, $\mathcal{B}(n,p)$, $n \geq 1$, $0 \leq p \leq 1$:

$$\forall k = 0, \ldots, n, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{C}_n^k\, p^k\, q^{n-k}.$$

Loi géométrique, $\mathcal{G}(p)$, $0 < p < 1$:

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}.$$

Loi binomiale négative, $\mathcal{B}_-(n,p)$, $n \geq 1$, $0 < p < 1$:

$$\forall k \geq n, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{C}_{k-1}^{n-1}\, p^n q^{k-n}.$$

Loi de Poisson, $\mathcal{P}(c)$, $c > 0$:

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-c}\, \frac{c^k}{k!}.$$

Loi / v.a.	Notation	Espérance	Variance	G_X
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	p	pq	$q + pz$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	np	npq	$(q + pz)^n$
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$1/p$	q/p^2	$pz\,(1 - qz)^{-1}$
Binomiale négative	$\mathcal{B}_-(n,p)$	n/p	nq/p^2	$\left(pz\,(1 - qz)^{-1}\right)^n$
Poisson	$\mathcal{P}(c)$	c	c	$e^{c(z-1)}$

Lois à densité

X à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ a pour densité p_X si

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \qquad \mathbb{P}(X \in B) = \int_B p_X(x)\,dx.$$

Loi uniforme sur $[a,b]$, $\mathcal{U}(a,b)$, $a < b$:

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x), \qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ (b-a)^{-1}(t-a) & \text{si } a \leq t < b \\ 1 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

Loi de Cauchy, $\mathcal{C}(c)$, $c > 0$:

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{c}{c^2+x^2}, \qquad F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{t}{c}\right).$$

Loi exponentielle, $\mathcal{E}(c)$, $c > 0$:

$$p_X(x) = ce^{-cx}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x), \qquad F_X(t) = \left(1 - e^{-ct}\right)\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(t).$$

Loi de Laplace, $\mathcal{L}(c)$, $c > 0$:

$$p_X(x) = \frac{c}{2}e^{-c|x|}, \qquad F_X(t) = \begin{cases} e^{ct}/2 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-ct}/2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Loi gaussienne ou normale réelle, $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Loi gaussienne dans $\mathbf{R}^d$, $\mathcal{N}(m,\Gamma)$: $m \in \mathbf{R}^d$, Γ matrice réelle $d \times d$ symétrique et semi-définie positive. Densité si et seulement si $\det\Gamma > 0$ et dans ce cas

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det\Gamma}}\exp\left(-\frac{(x-m)\cdot\Gamma^{-1}(x-m)}{2}\right).$$

Loi gamma, $\Gamma(s,c)$, $s > 0$, $c > 0$:

$$p_X(x) = \frac{c}{\Gamma(s)}\,(cx)^{s-1}\,e^{-cx}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x), \quad \text{avec} \quad \Gamma(s) = \int_{\mathbf{R}_+^*} x^{s-1}e^{-x}\,dx.$$

Loi / v.a.	Notation	Espérance	Variance	φ_X
Uniforme	$\mathcal{U}(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$\left(e^{itb} - e^{ita}\right)(it(b-a))^{-1}$
Cauchy	$\mathcal{C}(c)$	non	non	$e^{-c\|t\|}$
Exponentielle	$\mathcal{E}(c)$	c^{-1}	c^{-2}	$c(c-it)^{-1}$
Laplace	$\mathcal{L}(c)$	0	$2c^{-2}$	$c^2\left(c^2+t^2\right)^{-1}$
Gaussienne	$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	m	σ^2	$\exp\left(itm - \sigma^2t^2/2\right)$
Gaussienne	$\mathcal{N}(m,\Gamma)$	m	Γ	$\exp\left(it\cdot m - \frac{1}{2}t\cdot\Gamma t\right)$
Gamma	$\Gamma(s,c)$	sc^{-1}	sc^{-2}	$\left(c(c-it)^{-1}\right)^s$