Martingales à temps discret

- Dans toute la suite, on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Processus, filtrations, temps d'arrêt.

- Un *processus (stochastique)* est une suite $X = (X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans le même espace.

- Une *filtration* est une suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ croissante (pour l'inclusion) : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.

  ⋆ On note $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_n, n \in \mathbf{N})$.

- Un processus $X = (X_n)_{n\geq 0}$ est *adapté* par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si, pour tout entier n, X_n est $\mathcal{F}_n$–mesurable. Il est dit *prévisible* par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si, X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$–mesurable pour tout n.

  ⋆ Si besoin $\mathcal{F}_{-1} = \{\emptyset, \Omega\}$.

- Si X est un processus, on appelle filtration naturelle de X, la filtration définie par

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

  ⋆ C'est la plus petite filtration qui fait de X un processus adapté.

  ⋆ Si X est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, alors $\mathcal{F}_n^X \subset \mathcal{F}_n$ pour tout n.

Définition. Une variable aléatoire T à valeurs dans $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ est un *temps d'arrêt* de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si, pour tout entier n, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

- Si T est un temps d'arrêt,

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \in \mathbf{N},\, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

  est une tribu appelée *tribu des événements antérieurs à T*.

⋆ Définitions équivalentes en remplaçant $\{T \le n\}$ par $\{T = n\}$.

Exemple(s). 1. Soient S et T deux TA. Alors $S \vee T = \max(S,T)$ et $S \wedge T = \min(S,T)$ sont aussi des temps d'arrêt. En effet,

$$\{S \vee T \le n\} = \{S \le n\} \cap \{T \le n\}, \quad \{S \wedge T > n\} = \{S > n\} \cap \{T > n\}.$$

2. Soient B un ensemble borélien et T_B le temps d'entrée dans B de $(X_n)_{n\ge 0}$ i.e.

$$T_B = \inf\{n \ge 0 : X_n \in B\}, \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Alors T_B est un temps d'arrêt de la filtration naturelle de X puisque

$$\{T_B = n\} = \{X_0 \notin B\} \cap \ldots \cap \{X_{n-1} \notin B\} \cap \{X_n \in B\}.$$

3. Si S et T sont deux TA avec $S \le T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. En effet, si $A \in \mathcal{F}_S$, pour tout n,

$$A \cap \{T \le n\} = A \cap \{S \le n\} \cap \{T \le n\}$$

appartient à $\mathcal{F}_n$ puisque $A \cap \{S \le n\}$ et $\{T \le n\}$ sont aussi éléments de $\mathcal{F}_n$.

4. Si X est un processus adapté et T un TA fini, alors la v.a., notée X_T, définie par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ est $\mathcal{F}_T$–mesurable. En effet, si B est un borélien et n un entier,

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

- Soient T un TA et X une v.a. $\mathcal{F}_\infty$–mesurable. X est $\mathcal{F}_T$–mesurable si et seulement si, pour tout entier n, $X\mathbf{1}_{T\leq n}$ (ou $X\mathbf{1}_{T=n}$) est $\mathcal{F}_n$–mesurable.

- Si X est intégrable, alors

$$\mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_T\right] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_n\right] \mathbf{1}_{T=n} + \mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_\infty\right] \mathbf{1}_{T=+\infty} = \sum_{n\in\overline{\mathbf{N}}} \mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_n\right] \mathbf{1}_{T=n}.$$

En effet, si Y est $\mathcal{F}_T$–mesurable et bornée, $Y\mathbf{1}_{T=n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \overline{\mathbf{N}}$ et

$$Y \sum \mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_n\right] \mathbf{1}_{T=n} = \sum \mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_n\right] Y\mathbf{1}_{T=n} = \sum \mathbb{E}\left[XY\mathbf{1}_{T=n} \,|\, \mathcal{F}_n\right],$$

et prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left[Y \sum \mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_n\right] \mathbf{1}_{T=n}\right] = \sum \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY\mathbf{1}_{T=n} \,|\, \mathcal{F}_n\right]\right] = \sum \mathbb{E}\left[XY\mathbf{1}_{T=n}\right] = \mathbb{E}\left[XY\right].$$

2. Martingales and co.

Définition. Soient $X = (X_n)_{n\geq 0}$ un processus et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration. On dit que X est une *martingale* relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si

1. X est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$: pour tout entier n, X_n est $\mathcal{F}_n$–mesurable ;
2. X est intégrable : pour tout entier n, $\mathbb{E}\left[|X_n|\right] < \infty$;
3. Pour tout entier n, $X_n = \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right]$.

- Un processus réel, adapté par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et intégrable, est une *surmartingale* par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad X_n \geq \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right].$$
- Un processus réel, adapté par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et intégrable, est une *sous-martingale* par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si
$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad X_n \leq \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right].$$

Remarque(s). 1. Lorsque la filtration n'est pas précisée, il est entendu qu'il s'agit de la filtration naturelle du processus considéré.

2. X est une surmartingale ssi $-X$ est une sous-martingale.

3. X est une martingale ssi X est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

4. Si X est une sous-martingale, pour tous entiers n et p, $X_n \leq \mathbb{E}\left[X_{n+p} \,|\, \mathcal{F}_n\right]$. En effet,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+2} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{n+2} \,|\, \mathcal{F}_{n+1}\right] \,|\, \mathcal{F}_n\right] \geq \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] \geq X_n.$$

⋆ Si X est une sous-martingale, $n \longmapsto \mathbb{E}\left[X_n\right]$ est croissante ;

⋆ Si X est une surmartingale, $n \longmapsto \mathbb{E}\left[X_n\right]$ est décroissante ;

⋆ Si X est une martingale, $n \longmapsto \mathbb{E}\left[X_n\right]$ est constante.

Exemple(s). 1. Soient Z une variable aléatoire intégrable et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration. On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $X_n = \mathbb{E}\left[Z \,|\, \mathcal{F}_n\right]$. X est une martingale. Les points 1 et 2 de la définition sont évidents. Pour le 3ᵉ,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Z \,|\, \mathcal{F}_{n+1}\right] \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[Z \,|\, \mathcal{F}_n\right] = X_n.$$

⋆ Il faut retenir que « la » martingale est $\mathbb{E}\left[\mathrm{TRUC} \,|\, \mathcal{F}_n\right]$.

$\star$ En particulier, X est une sous-martingale si le processus est sous « la » martingale :

$$X_n \leq \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right].$$

2. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, intégrables et centrées. On pose $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = U_1 + \ldots + U_n, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \ldots, U_n).$$

$S = (S_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–martingale. Très clairement, S est adapté. S est intégrable car une somme finie de v.a. intégrables est intégrable. Finalement,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] - S_n = \mathbb{E}\left[S_{n+1} - S_n \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[U_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] \overset{\text{indpt.}}{=} \mathbb{E}\left[U_{n+1}\right] \overset{\text{centrée}}{=} 0.$$

3. Soient $0 \leq p \leq 1$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi donnée par $\mathbb{P}(U_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(U_1 = -1) = 1 - p$. Avec les notations de l'exemple précédent, S est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et intégrable. De plus, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] - S_n = \mathbb{E}\left[S_{n+1} - S_n \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[U_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] \overset{\text{indpt.}}{=} \mathbb{E}\left[U_{n+1}\right] = 2p - 1.$$

S est une sous-martingale ssi $p \geq 1/2$, une surmartingale ssi $p \leq 1/2$, une martingale ssi $p = 1/2$.

4. Les notations sont celles de l'exemple précédent avec $p = 1/2$. On considère, pour tout $n \geq 1$, $X_n = e^{S_n}$. X est une sous-martingale. Les deux premiers points sont évidents et, pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[e^{S_n}\, e^{U_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = e^{S_n}\, \mathbb{E}\left[e^{U_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\right] \overset{\text{i.}}{=} e^{S_n}\, \mathbb{E}\left[e^{U_{n+1}}\right] = X_n \cosh(1).$$

Comme $X_n \geq 0$ et $\cosh(1) \geq 1$, X est une sous-martingale.

Inégalité de Jensen.

- Une fonction g est convexe si, pour tous réels x, y et $\lambda \in [0,1]$,

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y).$$

  - ⋆ On a alors $g(x) \geq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$ (« la courbe est au dessus de la tangente »)
  - ⋆ Si g est dérivable, g est convexe ssi g' est croissante.

- La fonction $x \longmapsto |x|^p$ est convexe dès que $p \geq 1$ et $x \longmapsto e^{ax}$ est convexe pour tout réel a.

Proposition (Inégalité de Jensen)**.** *Soient X une v.a. intégrable et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Soit $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe telle que $\mathbb{E}\left[|g(X)|\right] < \infty$. Alors,*

$$g\left(\mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{G}\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[g(X) \,|\, \mathcal{G}\right].$$

- En particulier, lorsque g est convexe

$$g\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[g(X)\right].$$

  ⋆ Par exemple,

$$\mathbb{E}\left[X\right]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right], \qquad e^{\mathbb{E}[X]} \leq \mathbb{E}\left[e^X\right].$$

Corollaire. *Soient X une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–martingale et $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. On suppose que, pour tout $n \geq 0$, $g(X_n)$ est intégrable. Alors $(g(X_n))_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–sous-martingale.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a, d'après l'inégalité de Jensen

$$\mathbb{E}\left[g(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n\right] \overset{\text{Jensen}}{\geq} g\left(\mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right]\right) = g(X_n).$$

□

- Soit X est une sous-martingale ; si g est convexe et **croissante** alors $g(X)$ est une sous-martingale.

Exemple(s). Si X est une martingale ou une sous-martingale positive alors, pour $p \geq 1$, $(|X_n|^p)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale dès que $\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] < \infty$ pour tout entier n.

3. Théorème d'arrêt.

Définition. Une variable aléatoire T à valeurs dans $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ est un *temps d'arrêt* de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si, pour tout entier n, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

- Si T est un temps d'arrêt,

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \in \mathbf{N},\ A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

  est une tribu appelée *tribu des événements antérieurs à T*.

  $\star$ Définitions équivalentes en remplaçant $\{T \leq n\}$ par $\{T = n\}$.

- Soient T un TA et X une v.a. $\mathcal{F}_\infty$–mesurable. X est $\mathcal{F}_T$–mesurable si et seulement si, pour tout entier n, $X\mathbf{1}_{T\leq n}$ (ou $X\mathbf{1}_{T=n}$) est $\mathcal{F}_n$–mesurable.

- Si X est intégrable, alors

$$\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_T\right] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_n\right] \mathbf{1}_{T=n} + \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_\infty\right] \mathbf{1}_{T=+\infty} = \sum_{n\in\overline{\mathbf{N}}} \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_n\right] \mathbf{1}_{T=n}.$$

En effet, si Y est $\mathcal{F}_T$–mesurable et bornée, $Y\mathbf{1}_{T=n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \overline{\mathbf{N}}$ et

$$Y \sum \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_n\right] \mathbf{1}_{T=n} = \sum \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_n\right] Y\mathbf{1}_{T=n} = \sum \mathbb{E}\left[XY\mathbf{1}_{T=n} \mid \mathcal{F}_n\right],$$

et prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left[Y \sum \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_n\right] \mathbf{1}_{T=n}\right] = \sum \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[XY\mathbf{1}_{T=n} \mid \mathcal{F}_n\right]\right] = \sum \mathbb{E}\left[XY\mathbf{1}_{T=n}\right] = \mathbb{E}\left[XY\right].$$

Lemme. *Soient X une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–martingale et $H = (H_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible et bornée. On pose $M_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,*

$$M_n = H_1\left(X_1 - X_0\right) + \ldots + H_n\left(X_n - X_{n-1}\right).$$

Alors, M est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–martingale.

Démonstration. Pour $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[H_{n+1}\left(X_{n+1} - X_n\right) \mid \mathcal{F}_n\right] \overset{H \text{ prév.}}{=} H_{n+1}\,\mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n\right] \overset{X \text{ mart.}}{=} 0.$$

$\square$

Remarque(s). Si X est une sous-martingale (resp. une surmartingale) et H prévisible bornée et **positif**, M est une sous-martingale (resp. une surmartingale). En effet,

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} - M_n \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[H_{n+1}\left(X_{n+1} - X_n\right) | \, \mathcal{F}_n\right] \overset{H \text{ prév.}}{=} H_{n+1}\,\mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n \,|\, \mathcal{F}_n\right] \geq 0,$$

car X est une sous-martingale et H est positif (le sens des inégalités est préservé).

- Rappelons que si X est un processus adapté et T un TA fini, alors la v.a. X_T définie par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$ est $\mathcal{F}_T$–mesurable

Définition (Processus arrêté au temps T)**.** Soient X un processus adapté et T un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On appelle *processus arrêté au temps* T le processus X^T défini par

$$X_n^T = X_{n\wedge T}, \quad \text{i.e.} \quad X_n^T(\omega) = X_{n\wedge T(\omega)}(\omega), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Proposition. *Soient T un temps d'arrêt et X une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une surmartingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Alors, $X^T = (X_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une surmartingale) par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.*

Démonstration. Remarquons que pour tous n et p entiers,

$$X_{n\wedge p} = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k\leq p}\left(X_k - X_{k-1}\right).$$

Par conséquent, comme pour k et T entiers, $T \geq k$ équivaut à $T > k-1$, nous avons

$$X_n^T = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{k \leq T} \left(X_k - X_{k-1}\right) = X_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{T > k-1} \left(X_k - X_{k-1}\right).$$

Le processus $(H_k = \mathbf{1}_{T>k-1})_{k \geq 1}$ étant prévisible, borné et positif le lemme précédent (ou la remarque qui suit) montrer que X^T est une martingale (resp. une sous-martingale, resp. une surmartingale) par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. $\square$

Théorème (Théorème d'arrêt de Doob)**.** *Soient $X = (X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale, S et T deux temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. On suppose que $S \leq T$ et que T est borné* i.e. *il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $T \leq k$. Alors,*

$$X_S \leq \mathbb{E}\left[X_T \,|\, \mathcal{F}_S\right].$$

Remarque(s). 1. Si X est une martingale alors $X_S = \mathbb{E}\left[X_T \,|\, \mathcal{F}_S\right]$.

2. Ce résultat s'utilise souvent avec $S = 0$ et en prenant l'espérance, c'est à dire, dans le cas d'une martingale

$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right]. \tag{1}$$

Démonstration. Puisque $S \leq T \leq k$, on a

$$\mathbb{E}\left[X_T \,|\, \mathcal{F}_S\right] = \sum_{p=0}^{k} \mathbb{E}\left[X_T \,|\, \mathcal{F}_p\right] \mathbf{1}_{S=p} = \sum_{p=0}^{k} \mathbb{E}\left[X_{T\wedge k} \,|\, \mathcal{F}_p\right] \mathbf{1}_{S=p},$$

et comme X^T est une sous-martingale,

$$\mathbb{E}\left[X_T \,|\, \mathcal{F}_S\right] \geq \sum_{p=0}^{k} X_{T\wedge p} \mathbf{1}_{S=p} = \sum_{p=0}^{k} X_{T\wedge S} \mathbf{1}_{S=p} = X_{T\wedge S} = X_S.$$

□

Remarque(s). La formule (1) est vraie dans les cas suivants :

1. T est borné p.s. ;
2. T est fini p.s. et $\sup_{n\geq 0} |X_n|$ est intégrable ;
3. T est intégrable et il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{E}\left[|X_{n+1} - X_n| \,|\, \mathcal{F}_n\right] \leq C \text{ p.s.}$$

Si on ne peut pas appliquer l'un de ces résultats, on essaie de passer à la limite, quand $n \to +\infty$, dans la relation $\mathbb{E}\left[X_{T\wedge n}\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right]$.

Exemple(s) (Ruine du joueur)**.** Deux joueurs s'affrontent dans une partie de pile ou face. La fortune initiale du 1[er] joueur est de a euros, celle du second b euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. La fortune du 1[er] joueur est donnée par

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} U_i, \quad \text{avec } (U_i)_{i\geq 1} \text{ i.i.d. et } \mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(U_1 = -1) = 1/2.$$

La fin de la partie est donnée par le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0 \text{ ou } S_n = a + b\} = \inf\{n \geq 1 : S_n(a + b - S_n) = 0\}.$$

$(S_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$ sont des martingales ; il vient

$$\mathbb{E}\left[S_{n\wedge T}^2 - n \wedge T\right] = a^2, \qquad \mathbb{E}\left[S_{n\wedge T}\right] = a.$$

Comme $0 \leq S_{n\wedge T} \leq a + b$, on obtient par convergence monotone,

$$\mathbb{E}\left[T\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[T \wedge n\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[S_{n\wedge T}^2\right] - a^2 \leq (a + b)^2 - a^2.$$

T est intégrable et donc fini p.s. ; en particulier, $S_{n\wedge T} \longrightarrow S_T$ et comme $0 \leq S_{n\wedge T} \leq a + b$, on obtient facilement par passage à la limite,

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = a, \qquad \mathbb{E}\left[S_T^2 - T\right] = a^2.$$

Comme S_T est à valeurs dans $\{0, a+b\}$,

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = (a+b)\mathbb{P}(S_T = a+b), \qquad \mathbb{E}\left[T\right] = (a+b)^2\mathbb{P}(S_T = a+b) - a^2.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(S_T = a+b) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{P}(S_T = 0) = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbb{E}\left[T\right] = ab.$$

4. Inégalités maximales.

Proposition. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale. Pour tout $a \geq 0$,*

$$a\,\mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} X_k \geq a\right) \leq \mathbb{E}\left[X_n^+\right].$$

Remarque(s). 1. Rappelons que $x^+ = \max(x, 0) \leq |x|$.

2. Cette inégalité généralise l'inégalité de Markov : si $X \geq 0$ et $a \geq 0$, $a\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}\left[X\right]$.

Démonstration. Soit $a > 0$. On considère le temps d'arrêt $S = \inf\{0 \leq k \leq n : X_k \geq a\} \wedge n$ et on note $X_n^* = \max_{0\leq k\leq n} X_k$. Comme S est borné par n, on a d'après le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] \geq \mathbb{E}\left[X_S\right] = \mathbb{E}\left[X_S \mathbf{1}_{X_n^* \geq a}\right] + \mathbb{E}\left[X_S \mathbf{1}_{X_n^* < a}\right].$$

Par définition de S, lorsque $X_n^* \geq a$, $X_S \geq a$ et quand $X_n^* < a$, $S = n$. Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] \geq a\mathbb{P}\left(X_n^* \geq a\right) + \mathbb{E}\left[X_n \mathbf{1}_{X_n^* < a}\right]$$

et l'on déduit que

$$a\mathbb{P}\left(X_n^* \geq a\right) \leq \mathbb{E}\left[X_n\, \mathbf{1}_{X_n^* \geq a}\right] \leq \mathbb{E}\left[X_n^+\right].$$

□

Remarque(s). En fait, on a montré que

$$a\,\mathbb{P}\left(X_n^* \geq a\right) \leq \mathbb{E}\left[X_n\, \mathbf{1}_{X_n^* \geq a}\right], \quad \text{où} \quad X_n^* = \max_{0 \leq k \leq n} X_k. \tag{2}$$

Corollaire. *Soit* $(X_n)_{n \geq 0}$ *une sous-martingale. Pour tout* $a \geq 0$,

$$a\,\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 0} X_k \geq a\right) \leq \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}\left[X_n^+\right].$$

Démonstration. Soit $a > 0$. Comme $\{\sup_{k \geq 0} X_k > a\} = \cup_{n \geq 0}\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\}$ et que les ensembles $\{\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\}$ sont croissants

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \geq 0} X_k > a\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k > a\right) \leq a^{-1} \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}\left[X_n^+\right].$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, comme $\{\sup_{k\geq 0} X_k \geq a\} \subset \{\sup_{k\geq 0} X_k > a-\varepsilon\}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 0} X_k \geq a\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 0} X_k > a-\varepsilon\right) \leq (a-\varepsilon)^{-1} \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[X_n^+\right],$$

et on obtient quand $\varepsilon \to 0^+$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq 0} X_k \geq a\right) \leq a^{-1} \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[X_n^+\right].$$

$\square$

Corollaire. *Soient $p \geq 1$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale ou une sous-martingale positive telle que $X_n \in \mathrm{L}^p$ pour tout n. Alors, pour tout $a \geq 0$,*

$$a^p\, \mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} |X_k| \geq a\right) \leq \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right].$$

Démonstration. Si X est une martingale ou une sous-martingale positive, alors $|X|^p$ est une sous-martingale. Comme, pour $p \geq 1$, $\{\max_{0\leq k\leq n} |X_k| \geq a\} = \{\max_{0\leq k\leq n} |X_k|^p \geq a^p\}$, on a

$$a^p\, \mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} |X_k| \geq a\right) = a^p\, \mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} |X_k|^p \geq a^p\right) \leq \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right].$$

$\square$

- Ce dernier corollaire permet de retrouver une inégalité classique :

  Inégalité de Kolmogorov. Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes de carré intégrable et centrées. Pour $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n}|Y_1+\ldots+Y_k|\geq a\right)\leq a^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[Y_k^2\right].$$

Théorème. *Soient $p > 1$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale ou une sous-martingale positive telle que $X_n \in \mathrm{L}^p$ pour tout n. Alors,*

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq k\leq n}|X_k|^p\right]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right].$$

- Le résultat n'est pas vrai pour $p = 1$.

- Par convergence monotone, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0}|X_n|^p\right]\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right].$$

  ⋆ Pour une martingale (ou une sous-martingale positive) bornée dans L^p, la variable aléatoire $\sup_{n\geq 0}|X_n| \in \mathrm{L}^p$.

- La preuve utilise le résultat suivant : si X est une va positive, pour $p > 0$,

$$\mathbb{E}\left[X^p\right] = p\int_0^\infty t^{p-1}\,\mathbb{P}(X > t)\,dt.$$

  - $\star$ En particulier, si X est entière

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{i\geq 0}\mathbb{P}(X > i) = \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X \geq k).$$

Démonstration. Remarquons que, comme X est une martingale ou une sous-martingale positive, $|X|$ est une sous-martingale. Soit $\in \mathbf{N}$. Notons $Y_n = \max_{0\leq k\leq n}|X_k|$. D'après la formule précédente et la majoration (2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n^p] &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(Y_n > t)\,dt \leq p\int_0^\infty t^{p-2}\mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{Y_n>t}\right]\,dt,\\ &= p\,\mathbb{E}\left[|X_n|\int_0^\infty t^{p-2}\mathbf{1}_{Y_n>t}\,dt\right] = \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}\left[|X_n|\,Y_n^{p-1}\right].\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\mathbb{E}\left[|X_n|\,Y_n^{p-1}\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}\left[Y_n^p\right]\right)^{(p-1)/p},$$

et par conséquent,

$$\mathbb{E}[Y_n^p] \leq \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]\right)^{1/p}\left(\mathbb{E}\left[Y_n^p\right]\right)^{(p-1)/p}.$$

On en déduit alors que
$$(\mathbb{E}[Y_n^p])^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left(\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]\right)^{1/p}$$
ce qui donne le résultat annoncé. $\square$

5. Convergence.

- Il s'agit de déterminer si $\lim_{n\to\infty} X_n$ existe et dans ce cas de préciser en quel sens.

5.1. Martingales de carré intégrable.

Proposition (Décomposition de Doob). *Soient $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $X = (X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté et intégrable i.e. $X_n \in \mathrm{L}^1$ pour tout n. Alors, il existe une martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ et un processus prévisible $(V_n)_{n\geq 0}$ tels que : $M_0 = V_0 = 0$ et*
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n = X_0 + M_n + V_n.$$
De plus, cette décomposition est unique.

Démonstration. Commençons par l'existence. Supposons que cette décomposition existe. Alors, V étant prévisible, comme M est une martingale,

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= \mathbb{E}\left[V_n - V_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\right], \\ &= \mathbb{E}\left[X_n - X_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\right] - \mathbb{E}\left[M_n - M_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{E}\left[X_n - X_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\right]. \end{aligned}$$

On pose donc $M_0 = V_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} (V_k - V_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k - X_{k-1} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right], \qquad M_n = X_n - X_0 - V_n.$$

De manière évidente, V a toutes les propriétés requises. Pour voir que M est une martingale, il suffit de remarquer que

$$M_n - M_{n-1} = X_n - X_{n-1} - \mathbb{E}\left[X_n - X_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\right], \quad \text{et donc } \mathbb{E}\left[M_n - M_{n-1} \,|\, \mathcal{F}_{n-1}\right] = 0.$$

Supposons que deux décompositions existent : $X_n = X_0 + M_n + V_n = X_0 + M'_n + V'_n$, $n \in \mathbf{N}$. Pour tout n, $M_n - M'_n = V'_n - V_n$ et $M - M'$ est une martingale prévisible. Par suite, pour tout n,

$$M_n - M'_n \overset{\text{mart.}}{=} \mathbb{E}\left[M_{n+1} - M'_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] \overset{\text{prév.}}{=} M_{n+1} - M'_{n+1}.$$

Donc, pour tout n, $M_n - M'_n = M_0 - M'_0 = 0$ dont on déduit que $V_n = V'_n$. □

- Remarquons que
  - $\star$ X est une martingale ssi $V = 0$ i.e. pour tout n, $V_n = 0$ p.s.
  - $\star$ X est une sous-martingale ssi V est croissant i.e. pour tout n, $V_n \leq V_{n+1}$ p.s.
  - $\star$ X est une surmartingale ssi V est décroissant i.e. pour tout n, $V_n \geq V_{n+1}$ p.s.
- Lorsque X est une martingale de carré intégrable, X^2 est une sous-martingale
  - $\star$ La décomposition de Doob de X^2 s'écrit $X_n^2 = X_0^2 + M_n + A_n$ avec M martingale et A prévisible croissant
  - $\star$ On a, pour tout $n \geq 1$,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k^2 - X_{k-1}^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right].$$

  - $\star$ Le processus A s'appelle le crochet prévisible de X : il est noté $A_n = \langle X \rangle_n$
  - $\star$ Le processus A est souvent plus simple que X^2
  - $\star$ Si $X_n = U_1 + \ldots + U_n$ avec $(U_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi $\mathbb{P}(U_1 = \pm 1) = 1/2$, alors $A_n = n$.

Théorème. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale bornée dans L^2 i.e. $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_n|^2\right] < +\infty$. Alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. X_∞ de carré intégrable.*

- Ceci signifie qu'il existe $N \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et

$$\forall \omega \in N^c, \quad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_\infty(\omega), \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X_\infty|^2\right] = 0.$$

- Les accroissements d'une martingale de L^2 sont orthogonaux : pour $i \le j \le k \le l$, $\mathbb{E}\left[(X_l - X_k)(X_j - X_i)\right] = 0$. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X_l - X_k)(X_j - X_i)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(X_l - X_k)(X_j - X_i) \,|\, \mathcal{F}_k\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X_j - X_i)\mathbb{E}\left[(X_l - X_k) \,|\, \mathcal{F}_k\right]\right] = 0.\end{aligned}$$

  ⋆ En particulier, en écrivant $X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_n|^2\right] &= \mathbb{E}\left[|X_0|^2\right] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2\right], \\ \sup_{n\ge 0} \mathbb{E}\left[|X_n|^2\right] &= \mathbb{E}\left[|X_0|^2\right] + \sum_{k\ge 1} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2\right].\end{aligned}$$

- Finalement, pour tous entiers $r \ge n$, $\mathbb{E}\left[(X_r - X_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[|X_r|^2\right] - \mathbb{E}\left[|X_n|^2\right]$. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X_r - X_n)^2 \,|\, \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[|X_r|^2 \,|\, \mathcal{F}_n\right] - 2X_n\, \mathbb{E}\left[X_r \,|\, \mathcal{F}_n\right] + |X_n|^2, \\ &= \mathbb{E}\left[|X_r|^2 \,|\, \mathcal{F}_n\right] - 2X_n\, X_n + |X_n|^2 = \mathbb{E}\left[|X_r|^2 \,|\, \mathcal{F}_n\right] - |X_n|^2.\end{aligned}$$

Démonstration. Comme $(X_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale, la suite $(\mathbb{E}\,[X_n^2])_{n\geq 0}$ est croissante. Puisque $\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}\,[|X_n|^2] < +\infty$, cette suite est également bornée. Par conséquent, elle converge dans **R**, disons vers x_∞^2 : $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\,[X_n^2] = x_\infty^2$.

- Pour $r \geq n$,
$$\mathbb{E}\left[(X_r - X_n)^2\right] = \mathbb{E}\left[|X_r|^2\right] - \mathbb{E}\left[|X_n|^2\right] \leq x_\infty^2 - \mathbb{E}\left[|X_n|^2\right].$$
Donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^2. Elle converge vers X_∞ dans L^2.

- Pour tout $\omega \in \Omega$, $V_n = \sup_{p\geq n, q\geq n}|X_p(\omega) - X_q(\omega)|$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge vers $V(\omega) \geq 0$. On a, pour tout $n \geq 0$, comme $V_n \leq 2\sup_{r\geq n}|X_r - X_n|$,
$$\mathbb{E}\left[V^2\right] \leq \mathbb{E}\left[V_n^2\right] \leq 4\,\mathbb{E}\left[\sup_{r\geq n}|X_r - X_n|^2\right] \leq 16\sup_{r\geq n}\mathbb{E}\left[|X_r - X_n|^2\right]$$
d'après l'inégalité maximale de Doob. Par suite, pour tout $n \geq 0$,
$$\mathbb{E}\left[V^2\right] \leq 16\left(\sup_{r\geq n}\mathbb{E}\left[|X_r|^2\right] - \mathbb{E}\left[|X_n|^2\right]\right) = 16\left(x_\infty^2 - \mathbb{E}\left[|X_n|^2\right]\right).$$
D'où $V = 0$ p.s. : p.s. la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans **R** et donc convergente.

- La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge donc presque sûrement et dans L^2 vers X_∞.

$\square$

5.2. Cas général.

Théorème. *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une sous-martingale bornée dans* L^1 *i.e.* $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < +\infty$.

Alors, $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge presque sûrement vers une v.a.* X_∞ *intégrable.*

Corollaire. *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une surmartingale positive. Alors,* $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge presque sûrement vers une v.a.* X_∞ *intégrable et*

$$\forall n \geq 0, \qquad \mathbb{E}\left[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_n\right] \leq X_n.$$

- Ce corollaire s'applique en particulier pour une martingale positive. On a dans ce cas

$$\forall n \geq 0, \qquad \mathbb{E}\left[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_n\right] \leq X_n.$$

  - ⋆ L'inégalité ne devient pas une égalité en général.

Théorème. *Soient* $p \geq 1$, $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *une filtration et* X *une v.a. dans* L^p. *Alors* $\left(\mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_n\right]\right)_{n\geq 0}$ *converge presque sûrement et dans* L^p *vers* $\mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_\infty\right]$.

Théorème. *Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *une* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$*–martingale bornée dans* L^1. *On a équivalence entre :*

1. $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge vers* X_∞ *dans* L^1 ;
2. *Pour tout* $n \geq 0$, $X_n = \mathbb{E}\left[X_\infty \,|\, \mathcal{F}_n\right]$;
3. *Il existe* $X \in \mathrm{L}^1$ *telle que, pour tout* n, $X_n = \mathbb{E}\left[X \,|\, \mathcal{F}_n\right]$.