MATH703 : Correction succincte du CC1 2017/2018.

Exercice 1. Comme X et Y sont indépendantes, e^{XY} étant positive, on a, puisque $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$,

$$\mathbb{E}\left[e^{XY} \,|\, Y\right] = \mathbb{E}\left[e^{yX}\right]_{|y=Y} = e^{Y^2/2}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[e^{XY}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{XY} \,|\, Y\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{Y^2/2}\right],$$

et puisque Y a pour densité $y \longmapsto e^{-y^2}/\sqrt{\pi}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{XY}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{y^2/2}\, e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2}\, dy = \sqrt{2}.$$

Exercice 2. 1. Si $t < 0$, $\mathbb{P}(M > t \,|\, N) = 1$ puisque $M \geq 0$. Pour $t \geq 0$, comme N est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M > t \,|\, N) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(M > t \,|\, N = n)\mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{P}(M > t, N = n)}{\mathbb{P}(N = n)}\, \mathbf{1}_{N=n} \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) > t, N = n)}{\mathbb{P}(N = n)}\, \mathbf{1}_{N=n}.\end{aligned}$$

Comme N et $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(M > t \,|\, N) = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) > t)\, \mathbb{P}(N = n)}{\mathbb{P}(N = n)}\, \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) > t)\, \mathbf{1}_{N=n}.$$

Bien évidemment, $\min(X_1, \ldots, X_n) > t$ si et seulement si $X_1 > t$, $\ldots$, $X_n > t$. Puisque les $(X_k)_{k\geq 1}$ sont i.i.d. suivant $\mathcal{E}(\lambda)$,

$$\mathbb{P}(M > t \,|\, N) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_1 > t, \ldots, X_n > t)\, \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_1 > t)^n\, \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 1} e^{-\lambda t n}\, \mathbf{1}_{N=n}.$$

Par conséquent, pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(M > t \,|\, N) = e^{-\lambda t N}.$$

2. Conditionnellement à N, M suit la loi exponentielle de paramètre λN.

3. Pour $t < 0$, $\mathbb{P}(M \leq t) = 0$ puisque M est positive. Pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(M \leq t) = 1 - \mathbb{P}(M > t) = 1 - \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(M > t \,|\, N)\right] = 1 - \mathbb{E}\left[e^{-\lambda t N}\right].$$

Puisque N suit la loi géométrique de paramètre $1/2$, pour $0 \leq s \leq 1$,

$$G(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right] = \frac{s/2}{1 - s/2} = \frac{s}{2 - s}.$$

Par conséquent, pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(M \leq t) = 1 - G\left(e^{-\lambda t}\right) = 1 - \frac{e^{-\lambda t}}{2 - e^{-\lambda t}} = \frac{2 - 2e^{-\lambda t}}{2 - e^{-\lambda t}}.$$

Exercice 3. 1. (a) On a, par indépendance, comme $\lambda > 0$, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = S_n + \lambda \geq S_n.$$

(b) $(S_n - n\lambda)_{n\geq 0}$ est une martingale. En effet, pour $n \geq 0$, d'après le calcul précédent,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} - (n+1)\lambda \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \lambda - (n+1)\lambda = S_n - n\lambda.$$

(c) Comme $(S_n - n\lambda)_{n\geq 0}$ est une martingale et $(n\lambda)_{n\geq 0}$ est prévisible, la décomposition de Doob de $(S_n)_{n\geq 0}$ est :

$$S_n = (S_n - n\lambda) + n\lambda, \quad n \geq 0.$$

2. Pour $n \geq 0$, on obtient, en écrivant

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \left[(S_n - n\lambda) + (X_{n+1} - \lambda)\right]^2 - (n+1)\lambda \\ &= (S_n - n\lambda)^2 + 2(S_n - n\lambda)(X_{n+1} - \lambda) + (X_{n+1} - \lambda)^2 - (n+1)\lambda, \end{aligned}$$

et, en utilisant l'indépendance,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] &= (S_n - n\lambda)^2 + 2(S_n - n\lambda)\mathbb{E}\left[X_{n+1} - \lambda \,|\, \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - \lambda)^2 \,|\, \mathcal{F}_n\right] - (n+1)\lambda \\ &= (S_n - n\lambda)^2 + 2(S_n - n\lambda)\mathbb{E}\left[X_{n+1} - \lambda\right] + \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - \lambda)^2\right] - (n+1)\lambda, \\ &= (S_n - n\lambda)^2 + 0 + \mathbb{V}(X_{n+1}) - (n+1)\lambda = (S_n - n\lambda)^2 + 0 + \lambda - (n+1)\lambda = M_n. \end{aligned}$$

3. (a) On a, pour tout $n \geq 0$,

$$Z_{n+1} = 2^{S_n + X_{n+1}} e^{-\lambda(n+1)} = 2^{S_n} 2^{X_{n+1}} e^{-\lambda(n+1)},$$

et, puisque X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n} e^{-\lambda(n+1)}\, \mathbb{E}\left[2^{X_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n} e^{-\lambda(n+1)}\, \mathbb{E}\left[2^{X_{n+1}}\right].$$

Puisque $X_{n+1} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, pour tout réel s,

$$G(s) = \mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}}\right] = e^{\lambda(s-1)}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n} e^{-\lambda(n+1)} G(2) = 2^{S_n} e^{-\lambda(n+1)} e^{\lambda} = Z_n.$$

Il est clair que Z_n est positive.

(b) Toute martingale positive converge presque sûrement. La limite, ici Z_∞, est positive.

(c) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$Z_n = e^{S_n \ln 2 - \lambda n}, \quad \ln Z_n = S_n \ln 2 - \lambda n = n\left(\ln 2\, \frac{S_n}{n} - \lambda\right).$$

D'après la loi des grands nombres, $(S_n/n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}\left[X_1\right] = \lambda$. Comme $\ln 2 < 1$, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \ln Z_n = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} Z_n = 0.$$

4. (a) Puisque $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 presque sûrement, à partir d'un certain rang, tous les termes de cette suite positive sont compris entre 0 et $1/2$. Par conséquent, T est fini presque sûrement.