MATH703 : Correction succincte du rattrapage du CC1 2017/2018.

Exercice 1. Comme X et Y sont indépendantes, $\cos(XY)$ étant bornée, on a, puisque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$,

$$\mathbb{E}\left[\cos(XY) \,|\, Y\right] = \mathbb{E}\left[\cos(yX)\right]_{|y=Y} = (p\cos(y) + 1 - p)_{|y=Y} = p\cos(Y) + 1 - p.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[\cos(XY)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\cos(XY) \,|\, Y\right]\right] = p\,\mathbb{E}\left[\cos(Y)\right] + 1 - p \ ;$$

par ailleurs, puisque $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, pour tout réel t,

$$\mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \mathbb{E}\left[\cos(tY)\right] + i\,\mathbb{E}\left[\sin(tY)\right] = e^{-t^2/2}.$$

Par conséquent ($t = 1$),

$$\mathbb{E}\left[\cos(XY)\right] = p\,e^{-1/2} + 1 - p.$$

Exercice 2. 1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[P \,|\, N\right] &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[P \,|\, N = n\right] \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 0} \frac{\mathbb{E}\left[P\mathbf{1}_{N=n}\right]}{\mathbb{P}(N=n)}\, \mathbf{1}_{N=n} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{N} X_i\, \mathbf{1}_{N=n}\right]}{\mathbb{P}(N=n)}\, \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 0} \frac{\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{n} X_i\, \mathbf{1}_{N=n}\right]}{\mathbb{P}(N=n)}\, \mathbf{1}_{N=n}.\end{aligned}$$

Comme N et $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}\left[P \,|\, N\right] = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{i=0}^{n} \mathbb{E}\left[X_i\right]\, \mathbb{P}(N=n)}{\mathbb{P}(N=n)}\, \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 0} \prod_{i=0}^{n} \mathbb{E}\left[X_i\right]\, \mathbf{1}_{N=n}.$$

Puisque les $(X_k)_{k\geq 1}$ sont i.i.d. suivant $\mathcal{E}(1/2)$, pour tout $i \geq 1$, $\mathbb{E}\left[X_i\right] = 2$ et

$$\mathbb{E}\left[P \,|\, N\right] = \sum_{n\geq 0} 2^{n+1}\, \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 0} 2^{N+1}\, \mathbf{1}_{N=n} = 2^{N+1} \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{N=n} = 2^{N+1}.$$

2. On a

$$\mathbb{E}\left[P\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[P \,|\, N\right]\right] = \mathbb{E}\left[2^{N+1}\right],$$

et, puisque N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}\left[P\right] = \mathbb{E}\left[2^{N+1}\right] = \sum_{n\geq 0} 2^{n+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = 2e^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{(2\lambda)^n}{n!} = 2e^{-\lambda} e^{2\lambda} = 2e^{\lambda}.$$

Exercice 3. Remarquons tout d'abord que, pour tout entier n, S_n est $\mathcal{F}_n$–mesurable et $0 \leq S_n \leq n$.
1. (a) On a, par indépendance, comme $p \geq 0$, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = S_n + p \geq S_n.$$

(b) $(S_n - np)_{n\geq 0}$ est une martingale. En effet, pour $n \geq 0$, d'après le calcul précédent,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} - (n+1)p \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + p - (n+1)p = S_n - np.$$

La décomposition de Doob de $(S_n)_{n\geq 0}$ est donc donnée par : la martingale $M_n = S_n - np$ et le processus prévisible $V_n = np$.

2. (a) On a, pour tout $n \geq 0$,

$$Z_{n+1} = 2^{S_n + X_{n+1}}(p+1)^{-(n+1)} = 2^{S_n}2^{X_{n+1}}(p+1)^{-(n+1)},$$

et, puisque X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n}(p+1)^{-(n+1)}\,\mathbb{E}\left[2^{X_{n+1}}\,|\,\mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n}(p+1)^{-(n+1)}\,\mathbb{E}\left[2^{X_{n+1}}\right].$$

Puisque $X_{n+1} \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$, pour tout réel s,

$$G(s) = \mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}}\right] = (ps + 1 - p).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n}(p+1)^{-(n+1)}G(2) = 2^{S_n}(p+1)^{-(n+1)}(p+1) = Z_n.$$

Il est clair que Z_n est positive. Toute martingale positive converge presque sûrement. La limite, ici Z_∞, est positive.

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$Z_n = e^{S_n \ln 2 - n\ln(p+1)}, \quad \ln Z_n = S_n \ln 2 - n\ln(p+1) = n\left(\frac{S_n}{n}\ln 2 - \ln(p+1)\right).$$

D'après la loi des grands nombres, $(S_n/n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}\left[X_1\right] = p$. Comme $p\ln 2 - \ln(p+1) < 0$ pour tout $0 < p < 1$, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \ln Z_n = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} Z_n = 0.$$

3. (a) D'après la loi forte des grands nombres, S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}\left[X_1\right] = p > 0$ quand $n \to +\infty$ et donc $S_n \longrightarrow +\infty$.

(b) Comme $S_n \longrightarrow +\infty$ et, pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \{0,1\}$, T est fini presque sûrement. Pour tout entier n, d'après le théorème d'arrêt de Doob,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[(p+1)^{-(n\wedge T)}\,2^{S_{n\wedge T}}\right] = \mathbb{E}\left[Z_0\right] = 1.$$

Puisque T est fini presque sûrement, $\lim_{n\to\infty} Z_{n\wedge T} = Z_T = (p+1)^{-T}2^{S_T} = (p+1)^{-T}2^a$. Par ailleurs, $|Z_{n\wedge T}| \leq 2^a$. Par convergence dominée,

$$1 = \mathbb{E}\left[Z_0\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Z_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[Z_T\right] = 2^a\,\mathbb{E}\left[(p+1)^{-T}\right]\;;$$

d'où le résultat.