Université Savoie Mont Blanc
Département de Mathématiques

Master Mathématiques et Applications, 1re année
Modélisation Mathématique et Analyse Appliquée

MATH703 : Martingales et Chaînes de Markov

Contrôle continu nº 1

Documents autorisés : polycopié de cours, table des lois usuelles

Vendredi 16 novembre 2018.

Exercice 1. On rappelle que si Z suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$,

$$\forall s \in \mathbf{R}, \qquad \mathbb{E}\left[e^{sZ}\right] = e^{\sigma^2 s^2/2}.$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes ; la variable aléatoire Y suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et la loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$.

Calculer $\mathbb{E}\left[e^{XY} \mid Y\right]$ puis $\mathbb{E}\left[e^{XY}\right]$.

Exercice 2. Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$ et N une variable aléatoire indépendante des $(X_k)_{k\geq 1}$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Soit u un réel strictement positif. Calculer $\mathbb{E}\left[u^{S_N} \mid N\right]$ puis $\mathbb{E}\left[u^{S_N}\right]$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable indépendantes et identiquement distribuées. On note μ la moyenne de X_1 et σ^2 sa variance. On pose $S_0 = 0$, $M_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad M_n = S_n - n\mu, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.
3. Montrer que $(M_n^2 - n\sigma^2)_{n\geq 0}$ est une martingale.
4. En déduire la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_n^2)_{n\geq 0}$.

Tournez S.V.P.

Exercice 4. Soient $0 < p < 1/2$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. On pose $S_0 = 0$, $M_0 = 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

1. (a) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–martingale.

   (b) Justifier brièvement l'existence de $\lim_{n\to\infty} M_n$

2. Soient a et b deux entiers strictement positifs. On considère le temps d'arrêt

$$T = \inf\{n \geq 0 : S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

   (a) Préciser $\lim_{n\to\infty}(S_n/n)$ ainsi que $\lim_{n\to\infty} S_n$ et $\lim_{n\to\infty} M_n$.

   (b) En déduire que T est fini presque sûrement.

   (c) Quelles sont les valeurs prises par S_T ?

   (d) Préciser, pour tout entier n, $\mathbb{E}\left[M_{n\wedge T}\right]$.

   (e) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S_T = b)$.

Fin de l'épreuve