Université Savoie Mont Blanc
Département de Mathématiques

Master Mathématiques et Applications
Modélisation Mathématique et Analyse Appliquée

MATH703 : Correction succincte du CC1 2018/2019.

Exercice 1. Comme X et Y sont indépendantes, e^{XY} étant positive, on a,

$$\mathbb{E}\left[e^{XY} \mid Y\right] = H(Y) \quad \text{avec} \quad H(a) = \mathbb{E}\left[e^{aX}\right] = \frac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right) = \cosh(a).$$

Par conséquent, comme la densité de Y est paire,

$$\mathbb{E}\left[e^{XY}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{XY} \mid Y\right]\right] = \mathbb{E}\left[\cosh(Y)\right] = \mathbb{E}\left[e^Y\right] = e^{1/2}.$$

Exercice 2. La variable aléatoire N étant discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$, on a

$$\mathbb{E}\left[u^{S_N} \mid N\right] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[u^{S_N} \mid N = n\right] \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[u^{S_N}\mathbf{1}_{N=n}\right] \mathbb{P}(N=n)^{-1}\, \mathbf{1}_{N=n}.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}$, puisque N est indépendante des $(X_k)_{k\geq 1}$ qui sont i.i.d.,

$$\mathbb{E}\left[u^{S_N}\mathbf{1}_{N=n}\right] = \mathbb{E}\left[u^{S_n}\mathbf{1}_{N=n}\right] = \mathbb{E}\left[u^{S_n}\right] \mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}\left[u^{X_1}\right]^n \mathbb{P}(N=n) = (pu+1-p)^n\, \mathbb{P}(N=n).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[u^{S_N} \mid N\right] = \sum_{n\geq 0} (pu+1-p)^n\, \mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 0} (pu+1-p)^N\, \mathbf{1}_{N=n} = (pu+1-p)^N.$$

Finalement, comme N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}\left[u^{S_N}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[u^{S_N} \mid N\right]\right] = \mathbb{E}\left[(pu+1-p)^N\right] = e^{\lambda(pu+1-p-1)} = e^{\lambda p(u-1)}.$$

La variable S_N suit la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Exercice 3. Remarquons tout d'abord que, pour tout entier n, M_n est de carré intégrable et $\mathcal{F}_n$–mesurable.

1. On a, pour tout $n \geq 0$, $M_{n+1} = M_n + (X_{n+1} - \mu)$ et, par indépendance,

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} - \mu \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} - \mu\right] = M_n.$$

2. Pour tout $n \geq 0$, $M_{n+1}^2 = M_n^2 + 2M_n(X_{n+1} - \mu) + (X_{n+1} - \mu)^2$ et par indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] &= M_n^2 + 2M_n\, \mathbb{E}\left[X_{n+1} - \mu \mid \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - \mu)^2 \mid \mathcal{F}_n\right], \\ &= M_n^2 + 2M_n\, \mathbb{E}\left[X_{n+1} - \mu\right] + \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - \mu)^2\right] = M_n^2 + \mathbb{V}(X_{n+1}) = M_n^2 + \sigma^2 \geq M_n^2.\end{aligned}$$

$(M_n^2)_{n\geq 0}$ est donc une sous-martingale.

3. Le calcul précédent montre que $(M_n^2 - n\sigma^2)_{n\geq 0}$ est une martingale.

4. Comme $A_n = n\sigma^2$ est prévisible, la décomposition de Doob de la sous-martingale $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est

$$M_n^2 = \left(M_n^2 - n\sigma^2\right) + n\sigma^2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Exercice 4. On note $q = 1 - p$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, M_n est $\mathcal{F}_n$–mesurable et intégrable puisque borné. Par ailleurs, par indépendance,

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = M_n \, \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} \Big| \, \mathcal{F}_n\right] = M_n \, \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right] = M_n \left(p\frac{q}{p} + q\left(\frac{q}{p}\right)^{-1}\right) = M_n.$$

(b) Toute surmartingale positive est presque sûrement convergente.

2. (a) D'après la loi forte des grands nombres, $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge (presque sûrement et dans tout L^p pour p fini) vers $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 2p - 1 < 0$. Par conséquent, presque sûrement, $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ et, comme $q/p > 1$, $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.

(b) Puisque $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ et $|S_{n+1} - S_n| = 1$, $\tau = \inf\{n \geq 0 : S_n = -a\}$ est fini. Comme $T \leq \tau$, il en va de même de T.

(c) La variable S_T prend deux valeurs : $-a$ et b.

(d) Puisque $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale, pour tout n, $\mathbb{E}\left[M_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[M_0\right] = 1$.

(e) Par définition de T, pour tout entier n, $S_{n\wedge T} \leq b$ et, comme $q/p > 1$, $0 \leq M_{n\wedge T} \leq (q/p)^b$. De plus, $\lim_{n\to\infty} M_{n\wedge T} = M_T$. Par convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}\left[M_T\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[M_{n\wedge T}\right] = 1.$$

D'autre part, comme $\mathbb{P}(S_T = -a) = 1 - \mathbb{P}(S_T = b)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_T\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_T}\right] &= \left(\frac{q}{p}\right)^{-a} \mathbb{P}(S_T = -a) + \left(\frac{q}{p}\right)^{b} \mathbb{P}(S_T = b) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{-a} + \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{b} - \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}\right) \mathbb{P}(S_T = b). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{1 - r^{-a}}{r^b - r^{-a}}, \quad \text{où } r = \frac{q}{p}, \qquad \mathbb{P}(S_T = -a) = \frac{r^b - 1}{r^b - r^{-a}}.$$