MATH703 : Martingales et Chaînes de Markov

Contrôle continu nº 2

Documents autorisés : polycopié de cours, table des lois usuelles

Vendredi 21 décembre 2018.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Soit t un réel. On note, pour $n \in \mathbf{N}$, $Z_n = \exp(tS_n)$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on considère $M_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-2/3} X_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$, presque sûrement et dans L^2, vers une variable aléatoire M_∞ de carré intégrable.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}_2(X_1 = 3)$ et de $\mathbb{E}_3\left[X_1\right]$.

   (b) On suppose dans cette question que la loi de X_0 est $\mu = (1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4)$. Déterminer la loi de X_1 puis $\mathbb{E}_\mu\left[X_1\right]$.

2. (a) Faire le graphe des transitions de la chaîne.

   (b) Montrer que la chaîne est irréductible récurrente positive.

3. (a) Déterminer la probabilité invariante.

   (b) Que vaut $\mathbb{E}_1\left[S_1\right]$ où $S_1 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$?

4. Quelles sont les limites presque sûres de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 \ ?$$

Exercice 3. Soit $0 < p < 1$. Un candidat à un jeu répond à une série de questions. Pour chaque question, la probabilité qu'il donne une réponse correcte est p, celle qu'il se trompe est $1-p$. Le candidat gagne la partie lorsqu'il parvient à donner 4 bonnes réponses **successives** ; le jeu s'arrête alors. Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, le compteur de ses bonnes réponses successives retombe à zéro. Les réponses du candidat aux différentes questions sont supposées indépendantes.

On note, pour $n \in \mathbf{N}$, X_n le nombre de bonnes réponses successives données par le candidat après avoir répondu à n questions.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,\ldots,4\}$ dont on précisera la matrice de transition.
2. Classifier les états de la chaîne.
3. On note, pour $k \in \{0,\ldots,4\}$, $u(k) = \mathbb{E}_k[T_4]$ où $T_4 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 4\}$.
   (a) Préciser le système linéaire vérifié par $(u(k))_{k=0,\ldots,3}$.
   (b) Calculer la durée moyenne de la partie $u(0) = \mathbb{E}_0[T_4]$.

Fin de l'épreuve