Université Savoie Mont Blanc
Département de Mathématiques

MATH703 : Correction succincte du CC2 2018/2019.

Exercice 1. 1. Par indépendance, on a, puisque $Z_{n+1} = Z_n\, e^{tX_{n+1}}$ et $Z_n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = Z_n\, \mathbb{E}\left[e^{tX_{n+1}}\right] = Z_n\, e^{t^2/2} \geq Z_n.$$

2. Puisque pour tout entier k, $\mathbb{E}\left[X_k\right] = 0$, $(M_k)_{k\geq 1}$ est une martingale. D'autre part, pour tout entier n, les accroissements d'une martingale étant orthogonaux (ou par indépendance),

$$\mathbb{E}\left[M_n^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\left[X_k^2\right]}{k^{4/3}} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{4/3}} < +\infty,$$

puisque $4/3 > 1$. Par conséquent, $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale bornée dans L^2 : elle converge donc, presque sûrement et dans L^2, vers une v.a. M_∞ de carré intégrable.

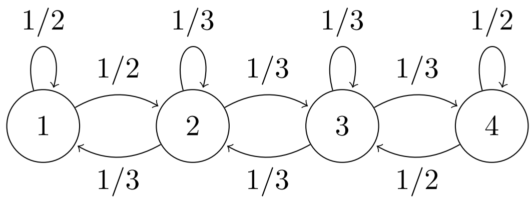
Exercice 2. 1. (a) On a $\mathbb{P}_2(X_1 = 3) = P(2,3) = 1/3$ et

$$\mathbb{E}_3\left[X_1\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3.$$

(b) Puisque $\mathbb{P}_{X_0} = \mu = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$,

$$\mathbb{P}_{X_1} = \mu\, P = \begin{pmatrix} 5/24 & 7/24 & 7/24 & 5/24 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{E}_\mu\left[X_1\right] = \mu\, P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}.$$

2. (a) Le graphe des transitions est :



(b) La chaîne est clairement irréductible. L'espace des états étant fini, la chaîne est récurrente positive.

3. (a) La chaîne étant irréductible, récurrente et positive, elle possède une unique probabilité invariante $\pi = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) \end{pmatrix}$ solution du système linéaire $\pi\, P = \pi$ soit

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & & & = \pi(1), \\ \pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & +\pi(3)/3 & & = \pi(2), \\ & +\pi(2)/3 & +\pi(3)/3 & +\pi(4)/2 & = \pi(3), \\ & & +\pi(3)/3 & +\pi(4)/2 & = \pi(4). \end{array} \right.$$

Ce système linéaire est équivalent à

$$\begin{cases} -\pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & & & = 0, \\ +\pi(1)/2 & -2\pi(2)/3 & +\pi(3)/3 & & = 0, \\ & +\pi(2)/3 & -2\pi(3)/3 & +\pi(4)/2 & = 0, \\ & & +\pi(3)/3 & -\pi(4)/2 & = 0, \end{cases}$$

puis, en appliquant la méthode du pivot de Gauss, équivalent au système

$$\begin{cases} -\pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & & = 0, \\ & -\pi(2)/3 & +\pi(3)/3 & = 0, \\ & & -\pi(3)/3 \quad +\pi(4)/2 & = 0, \end{cases}$$

dont les solutions sont $\pi(4)\begin{pmatrix}1 & 3/2 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$. Comme $\pi(1)+\pi(2)+\pi(3)+\pi(4)=1$, on obtient

$$\pi = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/10 & 3/10 & 3/10 & 2/10\end{pmatrix}.$$

(b) On a $\mathbb{E}_1[S_1] = \pi(1)^{-1} = 5$.

4. D'après le théorème ergodique, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \pi \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 = \pi \begin{pmatrix}1^2\\2^2\\3^2\\4^2\end{pmatrix} = \frac{73}{10}.$$

Exercice 3. 1. Le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $\{0,1,2,3,4\}$; étant donné l'indépendance des réponses, il s'agit d'une chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Il y a deux classes $\{0,1,2,3\}$ qui est transiente et $\{4\}$ qui est récurrente.

3. On a $u(4) = \mathbb{E}_4[T_4] = 0$ et, pour $k \in \{0,1,2,3\}$, $u(k) = 1 + Pu(k)$ c'est à dire

$$\begin{cases} u(0) & = 1 + (1-p)u(0) + pu(1), \\ u(1) & = 1 + (1-p)u(0) + pu(2), \\ u(2) & = 1 + (1-p)u(0) + pu(3), \\ u(3) & = 1 + (1-p)u(0) + pu(4) = 1 + (1-p)u(0). \end{cases}$$

4. Partant de l'égalité $u(3) = 1 + (1-p)u(0)$, on obtient $u(2) = (1+(1-p)u(0))(1+p)$ puis $u(1) = (1+(1-p)u(0))(1+p+p^2)$ et finalement $u(0) = (1+(1-p)u(0))(1+p+p^2+p^3)$ c'est à dire

$$\mathbb{E}_0[T_4] = u(0) = \frac{1+p+p^2+p^3}{p^4}.$$

On a aussi

$$u(1) = \frac{1+p+p^2}{p^4}, \qquad u(2) = \frac{1+p}{p^4}, \qquad u(3) = \frac{1}{p^4}.$$