Université Savoie Mont Blanc
Département de Mathématiques

Master Mathématiques et Applications, 1re année
Modélisation Mathématique et Analyse Appliquée

MATH703 : Martingales et Chaînes de Markov

Contrôle continu n° 1

Documents autorisés : polycopié de cours, table des lois usuelles

Mardi 12 novembre 2019.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes ; la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, la variable aléatoire Y suit la loi exponentielle de paramètre 2λ.

Calculer $\mathbb{E}\left[Y^X \,|\, Y\right]$ puis $\mathbb{E}\left[Y^X\right]$.

Exercice 2. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \qquad \mathbb{P}(Y = k \,|\, X) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{Y=k} \,|\, X\right] = (1 - X)\, X^{k-1}.$$

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[X \,|\, Y\right]$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $S_0 = 0$, $Y_0 = Z_0 = 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad Y_n = 3^{S_n}, \qquad Z_n = Y_n - (Y_0 + \ldots + Y_{n-1}), \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n^2)_{n\geq 0}$ sont des sous-martingales par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. (a) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
   (b) En déduire la décomposition de Doob de $(Y_n)_{n\geq 0}$.
   (c) Le processus $(Y_n)_{n\geq 0}$ est-il une sous-martingale ?
3. On considère, pour $n \geq 0$, $M_n = 2^{-n}\, Y_n$.
   (a) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Justifier l'existence de $\lim_{n\to\infty} M_n$; on note M_∞ cette limite.
   (c) Montrer que $M_\infty = 0$ presque sûrement.
4. Soit a un entier non nul. On considère le temps d'arrêt
$$T = \inf\{n \geq 0 : S_n = a\}.$$
   (a) Justifier que, presque sûrement, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
   (b) En déduire que T est fini presque sûrement.
   (c) Montrer que
$$\mathbb{E}\left[2^{-T}\right] = 3^{-a}.$$

Fin de l'épreuve