MATH703 : Correction succincte du CC1 2019/2020.

Exercice 1. Comme X et Y sont indépendantes, Y^X étant positive, on a,

$$\mathbb{E}\left[Y^X \,|\, Y\right] = H(Y) \quad \text{avec} \quad H(a) = \mathbb{E}\left[a^X\right] = e^{\lambda(a-1)}\ ; \qquad \mathbb{E}\left[Y^X \,|\, Y\right] = e^{\lambda(Y-1)}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[Y^X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y^X \,|\, Y\right]\right] = e^{-\lambda}\,\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y}\right] = e^{-\lambda}\int_0^{+\infty} e^{\lambda y}\,(2\lambda)e^{-2\lambda y}\,dy = 2e^{-\lambda}.$$

Exercice 2. 1. La variable Y est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(Y=k \,|\, X\right)\right] = \mathbb{E}\left[(1-X)X^{k-1}\right] = \int_0^1 (1-x)x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. La variable aléatoire Y étant discrète à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, on a

$$\mathbb{E}\left[X \,|\, Y\right] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[X \,|\, Y=k\right]\,\mathbf{1}_{Y=k} = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{Y=k}\right]\,\mathbb{P}(Y=k)^{-1}\,\mathbf{1}_{Y=k}.$$

D'autre part, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{Y=k}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_{Y=k} \,|\, X\right]\right] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{Y=k} \,|\, X\right]\right] = \mathbb{E}\left[(1-X)X^k\right] = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[X \,|\, Y\right] = \sum_{k\geq 1} \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}\,\mathbf{1}_{Y=k} = \sum_{k\geq 1} \frac{k}{k+2}\,\mathbf{1}_{Y=k} = \frac{Y}{Y+2}.$$

Exercice 3. Notons tout d'abord que, pour tout entier n, S_n est $\mathcal{F}_n$–mesurable et que $0 \leq S_n \leq n$.
1. Par indépendance,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = S_n + 1/2 \geq S_n.$$

Comme $S_{n+1}^2 = (S_n + X_{n+1})^2$, par indépendance, puisque $S_n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n^2 + 2S_n\,\mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2\right] = S_n^2 + S_n + 1/2 \geq S_n^2.$$

2. (a) Pour tout $n \geq 0$, $Y_{n+1} = Y_n 3^{X_{n+1}}$ et, par indépendance,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = Y_n\,\mathbb{E}\left[3^{X_{n+1}}\right] - (Y_0 + \ldots + Y_n) = 2Y_n - (Y_0 + \ldots + Y_{n-1} + Y_n) = Z_n.$$

$(Z_n)_{n\geq 0}$ est donc une martingale.

(b) Bien évidemment,

$$Y_n = Z_n + (Y_0 + \ldots + Y_{n-1}) = Y_0 + (Z_n - Y_0) + (Y_0 + \ldots + Y_{n-1}), \quad n \geq 0.$$

Comme $(V_n = Y_0 + \ldots + Y_{n-1})_{n\geq 0}$ est un processus prévisible et $(Z_n - Y_0)_{n\geq 0}$ une martingale nulle en 0, l'écriture précédente est la décomposition de Doob du processus $(Y_n)_{n\geq 0}$.

(c) Puisque le processus $(V_n)_{n\geq 0}$ est croissant, $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.

3. (a) Puisque $Y_{n+1} = Y_n\, 3^{X_{n+1}}$, on a, par indépendance,

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 2^{-(n+1)}\, Y_n\, \mathbb{E}\left[3^{X_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 2^{-(n+1)}\, Y_n\, \mathbb{E}\left[3^{X_{n+1}}\right] = 2^{-(n+1)}\, Y_n\, 2 = M_n.$$

(b) $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive ; par conséquent elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire M_∞.

(c) On a, pour $n \geq 1$,

$$\ln(M_n) = -n\ln(2) + S_n \ln(3) = n\left(-\ln(2) + S_n/n \ln(3)\right).$$

D'après la loi forte des grands nombres, S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 1/2$ quand $n \to +\infty$. Par conséquent, $\ln(M_n)/n$ converge vers $-\ln(2) + \ln(3)/2 = \ln(\sqrt{3}/2) < 0$. Finalement, presque sûrement, quand $n \to +\infty$, $\ln(M_n) \longrightarrow -\infty$ et $M_n \longrightarrow 0$.

4. (a) D'après la loi forte des grands nombres, S_n/n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 1/2$ quand $n \to +\infty$ et donc $S_n \longrightarrow +\infty$.

(b) Comme $S_n \longrightarrow +\infty$ et, pour tout $n \geq 1$, $X_n \in \{0, 1\}$, T est fini presque sûrement.

(c) Pour tout entier n, d'après le théorème d'arrêt de Doob,

$$\mathbb{E}\left[M_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[2^{-(n\wedge T)}\, 3^{S_{n\wedge T}}\right] = \mathbb{E}\left[M_0\right] = 1.$$

Puisque T est fini presque sûrement, $\lim_{n\to\infty} M_{n\wedge T} = M_T = 2^{-T}3^{S_T} = 2^{-T}3^a$. Par ailleurs, $|M_{n\wedge T}| \leq 3^a$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$1 = \mathbb{E}\left[M_0\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[M_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[M_T\right] = 3^a\, \mathbb{E}\left[2^{-T}\right] \;;$$

le résultat s'en suit immédiatement.