Université Savoie Mont Blanc — **Master Mathématiques et Applications**
Département de Mathématiques — **Modélisation Mathématique et Analyse Appliquée**

MATH703 : Correction succincte du CC2 2019/2020.

Exercice 1. 1. Par indépendance, on a, puisque, pour tout entier n, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et $p_{n+1} \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = S_n + p_{n+1} \geq S_n.$$

2. (a) Le calcul précédent montre que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. D'autre part, par indépendance, comme $0 \leq p_k \leq 1$,

$$\mathbb{E}\left[Z_n^2\right] = \mathbb{V}\left[S_n\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\left[X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k) \leq \sum_{k\geq 1} p_k < +\infty.$$

Par conséquent, $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2.

(b) Comme $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2, elle converge, presque sûrement et dans L^2, vers une v.a. Z_∞ de carré intégrable. Il en va de même de $(S_n)_{n\geq 0}$ car $S_n = Z_n + (p_1 + \ldots + p_n)$ et $\sum_{k\geq 1} p_k < +\infty$.

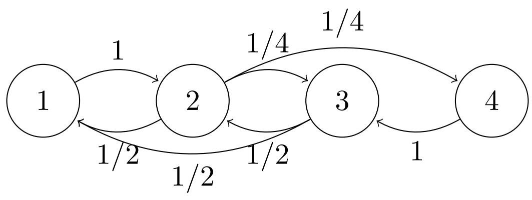
Exercice 2. 1. (a) On a $\mathbb{P}_3(X_1 = 2) = P(3,2) = 1/2$ et

$$\mathbb{E}_2\left[X_1\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{9}{4}.$$

(b) Puisque $\mathbb{P}_{X_0} = \mu = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$,

$$\mathbb{P}_{X_1} = \mu\, P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{E}_\mu\left[X_1\right] = \mu\, P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{25}{12}.$$

2. (a) Le graphe des transitions est :



(b) La chaîne est clairement irréductible. L'espace des états étant fini, elle est récurrente positive.

3. (a) La chaîne étant irréductible, récurrente et positive, elle possède une unique probabilité invariante $\pi = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) \end{pmatrix}$ solution du système linéaire $\pi\, P = \pi$ soit

$$\left\{ \begin{array}{lllll} & +\pi(2)/2 & +\pi(3)/2 & & = \pi(1), \\ +\pi(1) & & +\pi(3)/2 & & = \pi(2), \\ & +\pi(2)/4 & & +\pi(4) & = \pi(3), \\ & +\pi(2)/4 & & & = \pi(4). \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système linéaire sont proportionnelles à $\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et, comme π est une probabilité, on a

$$\pi = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/10 & 4/10 & 2/10 & 1/10\end{pmatrix}.$$

(b) On a $\mathbb{E}_2\left[S_2\right] = \pi(2)^{-1} = 10/4 = 5/2$.

4. D'après le théorème ergodique, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \pi \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{21}{10}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 = \pi \begin{pmatrix}1^2\\2^2\\3^2\\4^2\end{pmatrix} = \frac{53}{10}.$$

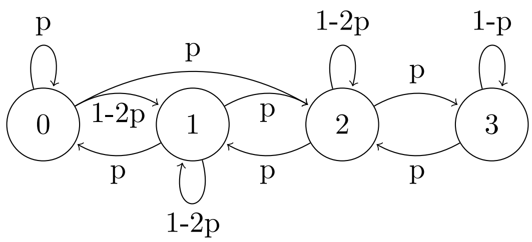
5. (a) On a $P^2(2,2) \geq P(2,3)P(3,2) = 1/8 > 0$ et $P^3(2,2) \geq P(2,4)P(4,3)P(3,2) = 1/8 > 0$.

(b) Les entiers 2 et 3 étant premiers entre eux, la chaîne est apériodique.

(c) La chaîne étant irréductible, récurrente positive et apériodique, $\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y)$ pour tous x et y dans E. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1. D'après le graphe des transitions,



la chaîne est irréductible. Comme E est fini, elle est récurrente positive.

2. La chaîne étant irréductible, récurrente et positive, elle possède une unique probabilité invariante $\pi = \begin{pmatrix}\pi(0) & \pi(1) & \pi(2) & \pi(3)\end{pmatrix}$ solution du système linéaire $\pi\, P = \pi$ soit

$$\begin{cases} +p\pi(0) & +p\pi(1) & & & = \pi(0),\\ +(1-2p)\pi(0) & +(1-2p)\pi(1) & +p\pi(2) & & = \pi(1),\\ +p\pi(0) & +p\pi(1) & +(1-2p)\pi(2) & +p\pi(3) & = \pi(2),\\ & & +p\pi(2) & +(1-p)\pi(3) & = \pi(3).\end{cases}$$

La dernière équation donne $\pi(2) = \pi(3)$. La 3^{e}, compte tenu de la 1re, fournit $\pi(0) = p\pi(3)$. Finalement, la 2^{e} donne $\pi(1) = (1-p)\pi(3)$ et $\pi = \pi(3)\begin{pmatrix}p & 1-p & 1 & 1\end{pmatrix}$. Comme π est une probabilité, on a

$$\pi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}p & 1-p & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. (a) On a $u(3) = 0$ et pour $k \in \{0,1,2\}$, $u(k) = 1 + Pu(k)$ c'est à dire

$$\begin{aligned} 1 + pu(0) + (1-2p)u(1) + pu(2) &= u(0), \\ 1 + pu(0) + (1-2p)u(1) + pu(2) &= u(1), \\ 1 + pu(1) + (1-2p)u(2) &= u(2). \end{aligned}$$

(b) Les deux premières lignes donnent $u(0) = u(1)$ puis les deux dernières conduisent au système $-pu(1) + pu(2) = -1$ et $pu(1) - 2pu(2) = -1$. On obtient $u(2) = 2/p$ et $u(1) = u(0) = 3/p$.