Université Savoie Mont Blanc
Département de Mathématiques

Master Mathématiques et Applications, 1re année
Modélisation Mathématique et Analyse Appliquée

MATH703 : Martingales et Chaînes de Markov

Examen de 2e session

Documents autorisés : polycopié de cours, table des lois usuelles

Mercredi 4 mars 2020.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$ et Y la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Calculer $\mathbb{E}[\cos(XY) \,|\, Y]$ puis $\mathbb{E}[\cos(XY)]$. Pensez à la fonction caractéristique de Y pour la deuxième partie de la question.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

1. (a) Montrer que $(S_n - n\lambda)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–martingale.

   (b) Donner la décomposition de Doob de $(S_n)_{n\geq 0}$.

2. Pour $n \geq 0$, on pose $M_n = (S_n - n\lambda)^2 - n\lambda$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–martingale.

3. Pour $n \geq 0$, on pose $Z_n = 2^{S_n} e^{-\lambda n}$.

   (a) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$–martingale positive.

   (b) Justifier brièvement que $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z_∞ positive.

   (c) En écrivant $Z_n = \exp(S_n \ln 2 - \lambda n)$, montrer $Z_\infty = 0$ presque sûrement.

Exercice 3. Soient $p \in]0, 1[$ et $(U_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathbb{P}(U_0 = 1) = p$, $\mathbb{P}(U_0 = -1) = 1 - p$. On note, pour tout entier $n \geq 0$,

$$X_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n.$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont on précisera la matrice de transition.

Tournez S.V.P.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}_2(X_1 = 3)$ et de $\mathbb{E}_3[X_1]$.

   (b) On suppose dans cette question que la loi de X_0 est $\mu = (1/4 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 1/4)$. Déterminer la loi de X_1 puis $\mathbb{E}_\mu[X_1]$.
2. (a) Faire le graphe des transitions de la chaîne.

   (b) Montrer que la chaîne est irréductible récurrente positive.
3. (a) Déterminer la probabilité invariante.

   (b) Que vaut $\mathbb{E}_1[S_1]$ où $S_1 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$?
4. Quelles sont les limites presque sûres de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 \text{ ?}$$

Fin de l'épreuve