MATH703 : Correction succincte de l'examen de 2e session 2019/2020.

Exercice 1. Comme X et Y sont indépendantes, $\cos(XY)$ étant bornée, on a, puisque $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$,

$$\mathbb{E}\left[\cos(XY) \,|\, Y\right] = \mathbb{E}\left[\cos(yX)\right]_{|y=Y} = (p\cos(y) + 1 - p)_{|y=Y} = p\cos(Y) + 1 - p.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[\cos(XY)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\cos(XY) \,|\, Y\right]\right] = p\,\mathbb{E}\left[\cos(Y)\right] + 1 - p\ ;$$

par ailleurs, puisque $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, pour tout réel t,

$$\mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \mathbb{E}\left[\cos(tY)\right] + i\,\mathbb{E}\left[\sin(tY)\right] = e^{-t^2/2}.$$

Par conséquent ($t = 1$),

$$\mathbb{E}\left[\cos(XY)\right] = p\,e^{-1/2} + 1 - p.$$

Exercice 2. 1. (a) On a, par indépendance, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = S_n + \lambda.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} - (n+1)\lambda \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \lambda - (n+1)\lambda = S_n - n\lambda.$$

(b) Comme $(S_n - n\lambda)_{n\geq 0}$ est une martingale et $(n\lambda)_{n\geq 0}$ est prévisible, la décomposition de Doob de $(S_n)_{n\geq 0}$ est :

$$S_n = (S_n - n\lambda) + n\lambda, \quad n \geq 0.$$

2. Pour $n \geq 0$, on obtient, en écrivant

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \left[(S_n - n\lambda) + (X_{n+1} - \lambda)\right]^2 - (n+1)\lambda \\ &= (S_n - n\lambda)^2 + 2(S_n - n\lambda)(X_{n+1} - \lambda) + (X_{n+1} - \lambda)^2 - (n+1)\lambda, \end{aligned}$$

et, en utilisant l'indépendance,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] &= (S_n - n\lambda)^2 + 2(S_n - n\lambda)\mathbb{E}\left[X_{n+1} - \lambda \,|\, \mathcal{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - \lambda)^2 \,|\, \mathcal{F}_n\right] - (n+1)\lambda \\ &= (S_n - n\lambda)^2 + 2(S_n - n\lambda)\mathbb{E}\left[X_{n+1} - \lambda\right] + \mathbb{E}\left[(X_{n+1} - \lambda)^2\right] - (n+1)\lambda, \\ &= (S_n - n\lambda)^2 + 0 + \mathbb{V}(X_{n+1}) - (n+1)\lambda = (S_n - n\lambda)^2 + 0 + \lambda - (n+1)\lambda = M_n. \end{aligned}$$

3. (a) On a, pour tout $n \geq 0$,

$$Z_{n+1} = 2^{S_n + X_{n+1}} e^{-\lambda(n+1)} = 2^{S_n} 2^{X_{n+1}} e^{-\lambda(n+1)},$$

et, puisque X_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n} e^{-\lambda(n+1)}\,\mathbb{E}\left[2^{X_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n} e^{-\lambda(n+1)}\,\mathbb{E}\left[2^{X_{n+1}}\right].$$

Puisque $X_{n+1} \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$, pour tout réel s,

$$G(s) = \mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}}\right] = e^{\lambda(s-1)}.$$

Par conséquent,
$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 2^{S_n} e^{-\lambda(n+1)} G(2) = 2^{S_n} e^{-\lambda(n+1)} e^{\lambda} = Z_n.$$
Il est clair que Z_n est positive.

(b) Toute martingale positive converge presque sûrement. La limite, ici Z_∞, est positive.

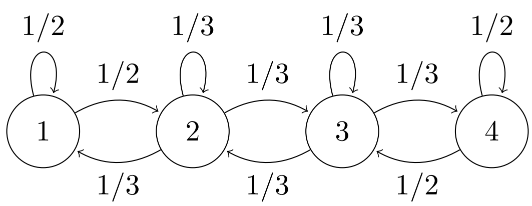
(c) Pour tout $n \geq 1$, on a
$$Z_n = e^{S_n \ln 2 - \lambda n}, \quad \ln Z_n = S_n \ln 2 - \lambda n = n \left(\ln 2 \, \frac{S_n}{n} - \lambda \right).$$
D'après la loi des grands nombres, $(S_n/n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}\left[X_1\right] = \lambda$. Comme $\ln 2 < 1$, presque sûrement,
$$\lim_{n\to\infty} \ln Z_n = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} Z_n = 0.$$

Exercice 3. Par indépendance, pour $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ éléments de $\{-1, 1\}$, on a
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \varepsilon_n \mid X_n = \varepsilon_n, \ldots, X_0 = \varepsilon_0) = \mathbb{P}(U_{n+1} = 1) = p,$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = -\varepsilon_n \mid X_n = \varepsilon_n, \ldots, X_0 = \varepsilon_0) = \mathbb{P}(U_{n+1} = -1) = 1 - p.$$
Par conséquent, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition
$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. 1. (a) On a $\mathbb{P}_2(X_1 = 3) = P(2,3) = 1/3$ et
$$\mathbb{E}_3\left[X_1\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3.$$

(b) Puisque $\mathbb{P}_{X_0} = \mu = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$,
$$\mathbb{P}_{X_1} = \mu P = \begin{pmatrix} 5/24 & 7/24 & 7/24 & 5/24 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{E}_\mu\left[X_1\right] = \mu P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}.$$

2. (a) Le graphe des transitions est :



(b) La chaîne est clairement irréductible. L'espace des états étant fini, la chaîne est récurrente positive.

3. (a) La chaîne étant irréductible, récurrente et positive, elle possède une unique probabilité in-

variante $\pi = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\end{pmatrix}$ solution du système linéaire $\pi\, P = \pi$ soit

$$\begin{cases} \pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & & & = \pi(1), \\ \pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & +\pi(3)/3 & & = \pi(2), \\ & +\pi(2)/3 & +\pi(3)/3 & +\pi(4)/2 & = \pi(3), \\ & & +\pi(3)/3 & +\pi(4)/2 & = \pi(4). \end{cases}$$

Ce système linéaire est équivalent à

$$\begin{cases} -\pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & & & = 0, \\ +\pi(1)/2 & -2\pi(2)/3 & +\pi(3)/3 & & = 0, \\ & +\pi(2)/3 & -2\pi(3)/3 & +\pi(4)/2 & = 0, \\ & & +\pi(3)/3 & -\pi(4)/2 & = 0, \end{cases}$$

puis, en appliquant la méthode du pivot de Gauss, équivalent au système

$$\begin{cases} -\pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & & & = 0, \\ & -\pi(2)/3 & +\pi(3)/3 & & = 0, \\ & & -\pi(3)/3 & +\pi(4)/2 & = 0, \end{cases}$$

dont les solutions sont $\pi(4)\begin{pmatrix}1 & 3/2 & 3/2 & 1\end{pmatrix}$. Comme $\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = 1$, on obtient

$$\pi = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/10 & 3/10 & 3/10 & 2/10\end{pmatrix}.$$

(b) On a $\mathbb{E}_1\left[S_1\right] = \pi(1)^{-1} = 5$.

4. D'après le théorème ergodique, presque sûrement,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = \pi \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 = \pi \begin{pmatrix}1^2\\2^2\\3^2\\4^2\end{pmatrix} = \frac{73}{10}.$$