Université Savoie Mont Blanc
Département de Mathématiques

Master Mathématiques et Applications, 1re année
Modélisation Mathématique et Analyse Appliquée

MATH703 : Martingales et Chaînes de Markov

Contrôle continu nº 1

Documents autorisés : polycopié de cours, table des lois usuelles

Mercredi 4 novembre 2020.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes ; la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, la variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Calculer $\mathbb{E}\left[e^{-XY} \mid Y\right]$ puis $\mathbb{E}\left[e^{-XY}\right]$.

Exercice 2. Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition F et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ indépendante des $(X_k)_{k\geq 1}$. On pose $M = \max(X_1, \ldots, X_N)$.

1. Soit t un réel.
   (a) Calculer, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(M \leq t \mid N = n) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{M\leq t} \mid N = n]$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(M \leq t \mid N) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{M\leq t} \mid N]$.
2. Exprimer la fonction de répartition de M à l'aide de la fonction F et de la fonction génératrice G de N. On rappelle, que pour $0 \leq s \leq 1$, $G(s) = \mathbb{E}\left[s^N\right]$.

Exercice 3. Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(U_1 = -1) = 1/2$. On note $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = U_1 + \ldots + U_n, \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \ldots, U_n).$$

1. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. (a) Montrer que $\left(3^{S_n}\right)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Majorer $\mathbb{E}\left[\max_{0\leq k\leq n} 9^{S_k}\right]$ en fonction de n.
3. Soient a un entier strictement positif et λ un réel avec $0 < \lambda < \pi/(2a)$. On considère le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geq 0 : |S_n| = a\}$.
   (a) Pour tout entier n, on note $X_n = (\cos\lambda)^{-n} \cos(\lambda S_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
   (b) En utilisant le théorème d'arrêt de Doob, montrer que, pour tout n,
   $$\cos(\lambda a)\, \mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\right] \leq 1.$$
   (c) En déduire que
   $$\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-T}\right] \leq \cos(\lambda a)^{-1},$$
   puis que T est fini presque sûrement.
   (d) Calculer $\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-T}\right]$.

Fin de l'épreuve