MATH703 : Correction succincte du CC1 2020/2021.

Exercice 1. Comme X et Y sont indépendantes, e^{-XY} étant positive, on a,

$$\mathbb{E}\left[e^{-XY}\,|\,Y\right] = H(Y) \quad \text{avec} \quad H(a) = \mathbb{E}\left[e^{-aX}\right] = \int_0^\infty e^{-ax}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda+a}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[e^{-XY}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{-XY}\,|\,Y\right]\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\lambda}{\lambda+Y}\right] = \int_0^1 \frac{\lambda}{\lambda+y}\,dy = \lambda\,\ln\left(1+1/\lambda\right).$$

Exercice 2. 1. Soit t un réel.

(a) Pour tout entier non nul n, nous avons, comme N est indépendante de $(X_k)_{k\geq 1}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M\leq t\,|\,N=n) &= \mathbb{P}(N=n)^{-1}\mathbb{P}\left(\max(X_1,\ldots,X_N)\leq t, N=n\right),\\ &= \mathbb{P}(N=n)^{-1}\mathbb{P}\left(\max(X_1,\ldots,X_n)\leq t, N=n\right) = \mathbb{P}\left(\max(X_1,\ldots,X_n)\leq t\right).\end{aligned}$$

Comme les variables $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, il vient

$$\mathbb{P}(M\leq t\,|\,N=n) = \mathbb{P}\left(X_1\leq t,\ldots,X_n\leq t\right) = \mathbb{P}(X_1\leq t)\ldots\mathbb{P}(X_n\leq t) = \mathbb{P}(X_1\leq t)^n = F(t)^n.$$

(b) La variable aléatoire N étant discrète à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}\left(M\leq t\,|\,N\right) = \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(M\leq t\,|\,N=n)\,\mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 1}F(t)^n\,\mathbf{1}_{N=n} = \sum_{n\geq 1}F(t)^N\,\mathbf{1}_{N=n} = F(t)^N.$$

2. Pour tout réel t, on a

$$\mathbb{P}(M\leq t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(M\leq t\,|\,N\right)\right] = \mathbb{E}\left[F(t)^N\right] = G(F(t)).$$

Exercice 3. Notons tout d'abord que, pour tout entier n, S_n est $\mathcal{F}_n$–mesurable et que $-n\leq S_n\leq n$.

1. Pour tout entier n, on a, comme U_{n+1} est à valeurs dans $\{-1,1\}$, (avec probabilité 1)

$$S_{n+1}^3 = (S_n+U_{n+1})^3 = S_n^3 + 3S_n^2U_{n+1} + 3S_nU_{n+1}^2 + U_{n+1}^3 = S_n^3 + 3S_n^2U_{n+1} + 3S_n + U_{n+1}.$$

Comme S_n est $\mathcal{F}_n$–mesurable et U_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, il vient, puisque U_{n+1} est centrée,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right] &= S_n + \mathbb{E}\left[U_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[U_{n+1}\right] = S_n,\\ \mathbb{E}\left[S_{n+1}^3\,|\,\mathcal{F}_n\right] &= S_n^3 + 3S_n^2\,\mathbb{E}\left[U_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right] + 3S_n + \mathbb{E}\left[U_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right],\\ &= S_n^3 + 3S_n^2\,\mathbb{E}\left[U_{n+1}\right] + 3S_n + \mathbb{E}\left[U_{n+1}\right] = S_n^3 + 3S_n.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entier n,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^3 - 3(n+1)S_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\right] = S_n^3 + 3S_n - 3(n+1)S_n = S_n^3 - 3nS_n,$$

ce qui montre que $\left(S_n^3 - 3nS_n\right)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2. (a) Pour tout entier n, puisque U_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{E}\left[3^{S_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[3^{S_n} 3^{U_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 3^{S_n}\, \mathbb{E}\left[3^{U_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = 3^{S_n}\, \mathbb{E}\left[3^{U_{n+1}}\right] = \frac{5}{3}\, 3^{S_n} \geq 3^{S_n}.$$

(b) Puisque $\left(3^{S_n}\right)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale positive, on a, via l'inégalité maximale de Doob pour $p = 2$, pour tout entier $n \geq 1$, les variables $(U_k)_{k\geq 1}$ étant i.i.d.,

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq k\leq n} 9^{S_k}\right] = \mathbb{E}\left[\max_{0\leq k\leq n} \left(3^{S_k}\right)^2\right] \leq 4\,\mathbb{E}\left[\left(3^{S_n}\right)^2\right] = 4\,\mathbb{E}\left[9^{S_n}\right] = 4\,\mathbb{E}\left[9^{U_1}\right]^n = 4\left(\frac{41}{9}\right)^n.$$

3. (a) Pour tout $n \geq 0$, comme U_{n+1} est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, par parité de la fonction cosinus,

$$\begin{aligned}\cos(\lambda S_{n+1}) = \cos(\lambda S_n + \lambda U_{n+1}) &= \cos(\lambda S_n)\cos(\lambda U_{n+1}) - \sin(\lambda S_n)\sin(\lambda U_{n+1}),\\ &= \cos(\lambda S_n)\cos(\lambda) - \sin(\lambda S_n)\sin(\lambda U_{n+1}).\end{aligned}$$

Par conséquent, comme U_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$ et la fonction sinus impaire,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\cos(\lambda S_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n\right] &= \cos(\lambda S_n)\cos(\lambda) - \sin(\lambda S_n)\,\mathbb{E}\left[\sin(\lambda U_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n\right],\\ &= \cos(\lambda S_n)\cos(\lambda) - \sin(\lambda S_n)\,\mathbb{E}\left[\sin(\lambda U_{n+1})\right] = \cos(\lambda S_n)\cos(\lambda)\ ;\end{aligned}$$

le résultat en découle immédiatement.

(b) D'après le théorème d'arrêt de Doob, pour tout n, par parité de la fonction cosinus,

$$1 = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}\left[X_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\cos(\lambda S_{n\wedge T})\right] = \mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\cos(\lambda|S_{n\wedge T}|)\right].$$

Par définition de T, $0 \leq \lambda|S_{n\wedge T}| \leq \lambda a \leq \pi/2$. Comme la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi/2]$, $\cos(\lambda|S_{n\wedge T}|) \geq \cos(\lambda a)$, on a $1 \geq \cos(\lambda a)\,\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\right]$.

(c) La suite $\left((\cos\lambda)^{-n\wedge T}\right)_{n\geq 0}$ est croissante, positive et $\lim_{n\to\infty}(\cos\lambda)^{-n\wedge T} = (\cos\lambda)^{-T}$ (même si $T = +\infty$). Par convergence monotone,

$$\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-T}\right] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\right] \leq \cos(\lambda a)^{-1}.$$

Par conséquent, $(\cos\lambda)^{-T}$ est fini presque sûrement puisque intégrable et T est aussi fini presque sûrement.

(d) T étant fini presque sûrement, on a, avec probabilité 1, par définition de T,

$$\lim_{n\to\infty}(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\cos(\lambda|S_{n\wedge T}|) = (\cos\lambda)^{-T}\cos(\lambda|S_T|) = (\cos\lambda)^{-T}\cos(\lambda a).$$

D'autre part, pour tout n, $\left|(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\cos(\lambda|S_{n\wedge T}|)\right| \leq (\cos\lambda)^{-T}$ qui est intégrable.

Par convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-T}\cos(\lambda a)\right] = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-n\wedge T}\cos(\lambda|S_{n\wedge T}|)\right] = 1, \quad \text{soit} \quad \mathbb{E}\left[(\cos\lambda)^{-T}\right] = \cos(\lambda a)^{-1}.$$