# MATH703 : Martingales et Chaînes de Markov

*Contrôle continu nº 2*

Documents autorisés : polycopié de cours, table des lois usuelles

Mardi 15 décembre 2020.

**Exercice 1.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ; pour tout $n \geq 1$, $X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$. On pose $S_0 = Z_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad Z_n = (X_1 - \lambda_1) + \ldots + (X_n - \lambda_n), \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. On suppose que $\sum_{n\geq 1} \lambda_n < +\infty$.

   (a) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ bornée dans $\mathrm{L}^2$.

   (b) En déduire que, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $(S_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et dans $\mathrm{L}^2$ vers une variable aléatoire $S_\infty$ de carré intégrable.

**Exercice 2.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Préciser les valeurs de $\mathbb{P}_2(X_1 = 3)$ et de $\mathbb{E}_3[X_1]$.

   (b) On suppose dans cette question que la loi de $X_0$ est $\mu = (1/2 \quad 1/4 \quad 0 \quad 1/4)$. Déterminer la loi de $X_1$ puis $\mathbb{E}_\mu[X_1]$.
2. (a) Faire le graphe des transitions de la chaîne.

   (b) Montrer que la chaîne est irréductible récurrente positive.
3. (a) Déterminer la probabilité invariante.

   (b) Que vaut $\mathbb{E}_4[S_4]$ où $S_4 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 4\}$ ?
4. Quelles sont les limites presque sûres de

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 \ ?$$

5. (a) Montrer que la chaîne est apériodique.

   (b) Préciser $\lim_{n\to\infty} P^n$.

**Exercice 3.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{0, 1, 2, 3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $0 < p < 1$.

1. Faire le graphe des transitions de la chaîne.
2. Classifier les états de la chaîne.
3. On note $T_3 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}$ et, pour $k \in E$, $z(k) = \mathbb{P}_k(\{T_3 < +\infty\})$.
   (a) Préciser les valeurs $z(0)$ et $z(3)$.
   (b) Déterminer $z(1)$ et $z(2)$.



Fin de l'épreuve