Université Savoie Mont Blanc **Master Mathématiques et Applications**
Département de Mathématiques **Modélisation Mathématique et Analyse Appliquée**

MATH703 : Correction succincte du CC2 2020/2021.

Exercice 1. 1. Par indépendance, on a, puisque, pour tout entier n, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et $\lambda_{n+1} \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n\right] = S_n + \mathbb{E}\left[X_{n+1}\right] = S_n + \lambda_{n+1} \geq S_n.$$

2. (a) Le calcul précédent montre que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. D'autre part, par indépendance, comme $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ est une suite de réels positifs, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[Z_n^2\right] = \mathbb{V}\left[S_n\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}\left[X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leq \sum_{k\geq 1} \lambda_k < +\infty.$$

Par conséquent, $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2.

(b) Comme $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2, elle converge, presque sûrement et dans L^2, vers une v.a. Z_∞ de carré intégrable. Il en va de même de $(S_n)_{n\geq 0}$ car $S_n = Z_n + (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ et $\sum_{k\geq 1} \lambda_k < +\infty$.

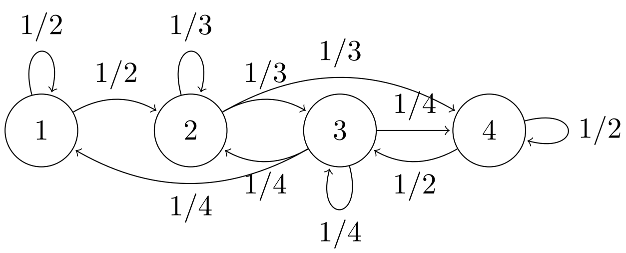
Exercice 2. 1. (a) On a $\mathbb{P}_2(X_1 = 3) = P(2,3) = 1/3$ et

$$\mathbb{E}_3\left[X_1\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}.$$

(b) Puisque $\mathbb{P}_{X_0} = \mu = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$,

$$\mathbb{P}_{X_1} = \mu\, P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 5/24 & 5/24 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{E}_\mu\left[X_1\right] = \mu\, P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{57}{24} = \frac{19}{8}.$$

2. (a) Le graphe des transitions est :



(b) La chaîne est clairement irréductible ($1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 3 \to 1$). L'espace des états étant fini, elle est récurrente positive.

3. (a) La chaîne étant irréductible, récurrente et positive, elle possède une unique probabilité in-

variante $\pi = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\end{pmatrix}$ solution du système linéaire $\pi P = \pi$ soit

$$\begin{cases} +\pi(1)/2 & & +\pi(3)/4 & & = \pi(1), \\ +\pi(1)/2 & +\pi(2)/3 & +\pi(3)/4 & & = \pi(2), \\ & +\pi(2)/3 & +\pi(3)/4 & +\pi(4)/2 & = \pi(3), \\ & +\pi(2)/3 & +\pi(3)/4 & +\pi(4)/2 & = \pi(4). \end{cases}$$

Les solutions de ce système linéaire sont proportionnelles à $\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 4\end{pmatrix}$ et, comme π est une probabilité, on a

$$\pi = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/13 & 3/13 & 4/13 & 4/13\end{pmatrix}.$$

(b) On a $\mathbb{E}_4[S_4] = \pi(4)^{-1} = 13/4$.

4. D'après le théorème ergodique, presque sûrement,

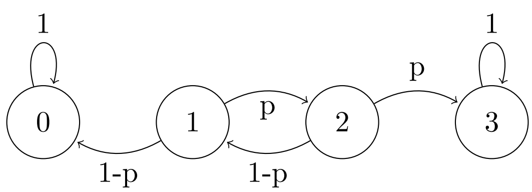
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = \pi \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{36}{13}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2 = \pi \begin{pmatrix}1^2\\2^2\\3^2\\4^2\end{pmatrix} = \frac{114}{13}.$$

5. (a) Cette chaîne irréductible est apériodique puisque $P(1,1) = 1/2 > 0$.

(b) La chaîne étant irréductible, récurrente positive et apériodique, $\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y)$ pour tous x et y dans E. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix}\pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4)\end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 4\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. 1. Le graphe des transitions est :



2. Les états 0 et 4 sont absorbants, les états 2 et 3 communiquent entre eux et sont transients ; trois classes d'équivalence : $\{0\}$ et $\{4\}$ absorbantes (donc récurrentes) et $\{2,3\}$ transiente.

3. (a) On a bien sûr $z(3) = \mathbb{P}_3(\{T_3 < +\infty\}) = 1$; comme 0 est absorbant, impossible d'atteindre le point 3 en partant de 0 et donc $z(0) = \mathbb{P}_0(\{T_3 < +\infty\}) = 0$.

(b) Pour tout $k \in \{0,1,2\}$, on a $z(k) = Pz(k)$. En particulier, $z(1) = (1-p)z(0) + pz(2) = pz(2)$ et $z(2) = (1-p)z(1) + pz(3) = (1-p)z(1) + p$. Par conséquent,

$$z(2) = \frac{p}{1-p(1-p)}, \quad z(1) = \frac{p^2}{1-p(1-p)}.$$