Institut Mathématique de Rennes
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année universitaire 1999/2000

Filière II : EDS rétrogrades et applications

Examen Final : Durée 3 heures

Mercredi 29 mars 2000

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ complet. $\{W_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien d–dimensionnel sur cet espace et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est la tribu augmentée de W. T est un réel strictement positif.

Exercice 1. Notion de g–espérance.

Soit $g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout (y,z), $\{g(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable. On suppose qu'il existe $K \geq 0$ telle que, $\mathbb{P}$-p.s., pour tout (t,y,y',z,z'),

$$\text{(i) } \big|g(t,y,z) - g(t,y',z')\big| \leq K\big(|y-y'| + |z-z'|\big)\,; \qquad \text{(ii) } g(t,y,0) = 0.$$

Soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$–mesurable et de carré intégrable ; on considére l'EDSR suivante :

$$Y_u = \xi + \int_u^T g(r, Y_r, Z_r)dr - \int_u^T Z_r \cdot dW_r, \qquad 0 \leq u \leq T. \tag{1}$$

1. Justifiez brièvement le fait que l'EDSR (1) possède une unique solution.

On note, pour tout $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$, $\mathcal{E}_g(\xi) := Y_0$ où $\{Y_t, Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ est la solution de l'EDSR (1).

2. a. Montrer que si c est une constante réelle alors $\mathcal{E}_g(c) = c$.

b. Établir que si $\xi_1 \leq \xi_2$ $\mathbb{P}$–p.s. alors $\mathcal{E}_g(\xi_1) \leq \mathcal{E}_g(\xi_2)$ et que, dans ce cas, $\mathcal{E}_g(\xi_1) = \mathcal{E}_g(\xi_2)$ si et seulement si $\xi_1 = \xi_2$ $\mathbb{P}$–p.s.

c. Soit $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_S)$ avec $0 \leq S \leq T$. Montrer que $\mathcal{E}_g(\xi) = y_0$ où $\{y_t, z_t\}_{0\leq t\leq S}$ est la solution de l'EDSR

$$y_t = \xi + \int_t^S g(r, y_r, z_r)dr - \int_t^S z_r \cdot dW_r, \qquad 0 \leq t \leq S.$$

3. a. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, $\mathcal{E}_g(\mathbf{1}_A\xi) = \mathcal{E}_g(\mathbf{1}_A Y_t)$ où $\{Y_t, Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ est la solution de l'EDSR (1). `Indic.` : multiplier l'équation (1) par $\mathbf{1}_A$ pour $t \leq u \leq T$ et montrer que $\mathbf{1}_A g(r,y,z) = g(r, \mathbf{1}_A y, \mathbf{1}_A z)$.

b. Montrer que Y_t est l'unique variable aléatoire, η, de carré intégrable et $\mathcal{F}_t$–mesurable vérifiant : pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, $\mathcal{E}_g(\mathbf{1}_A\xi) = \mathcal{E}_g(\mathbf{1}_A\eta)$.

On note, pour $t \in [0,T]$ et $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$, $\mathcal{E}_g\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right) := Y_t$ où $\{Y_t, Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ est la solution de l'EDSR (1).

4. a. Que vaut $\mathcal{E}_g\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right)$ si ξ est $\mathcal{F}_t$–mesurable ? Si ξ est une constante ?

b. b Si $\mathbb{P}$–p.s. $\xi_1 \geq \xi_2$, montrer que $\mathcal{E}_g\left(\xi_1 \mid \mathcal{F}_t\right) \geq \mathcal{E}_g\left(\xi_2 \mid \mathcal{F}_t\right)$.

c. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{F}_t$, $\mathcal{E}_g\left(\mathbf{1}_B\xi \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{1}_B\,\mathcal{E}_g\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right)$.

5. Étudier le cas $g(t,y,z) = b_t \cdot z$ où $\{b_t\}_{0\leq t\leq T}$ est un processus progressivement mesurable et borné ?

6. Montrer que $\mathcal{E}_{-K}\big(\xi \mid \mathcal{F}_t\big) \leq \mathcal{E}_g\left(\xi \mid \mathcal{F}_t\right) \leq \mathcal{E}_K\big(\xi \mid \mathcal{F}_t\big)$, où la notation $\mathcal{E}_\kappa$ signifie $\mathcal{E}_g$ avec $g(t,y,z) = \kappa|z|$.

Exercice 2. Résolution des EDSR dans L^p pour $p > 1$.

On se donne un réel $p > 1$ et $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ telle que, pour tout (t,y,z), $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable ; on suppose qu'il existe $K \geq 0$ telle que, $\mathbb{P}$–p.s., pour tout (t,y,y',z,z'),

$$\big|f(t,y,z) - f(t,y',z')\big| \leq K\big(|y-y'| + \|z-z'\|\big).$$

Soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$–mesurable. On suppose que

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^p + \Big(\int_0^T \big|f(t,0,0)\big|^2 dt\Big)^{p/2}\right] < +\infty.$$

Sous ces hypothèses, on veut construire une solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2}$$

Une solution de l'EDSR (2) est un couple de processus, $\{Y_t,Z_t\}_{0\leq t\leq T}$,progressivement mesurables, vérifiant (2) tel que : $\{Y_t\}_{0\leq t\leq T}$ est continu et

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] < +\infty.$$

On note $\mathcal{S}^p$ et M^p l'ensemble des processus progressivement mesurables vérifiant :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p\right] < +\infty, \quad \text{respectivement,} \quad \mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] < +\infty.$$

On munit ces deux espaces des normes résultant de leur définition.

1. Montrer que si $\{Y_t,Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ est solution de l'EDSR (2) alors $\{Y_t\}_{0\leq t\leq T}$ appartient à $\mathcal{S}^p$.

2. Soit $\{U_t,V_t\}_{0\leq t\leq T}$ un élément de $\mathcal{S}^p \times \mathrm{M}^p$. Résoudre l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,U_r,V_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

3. Soient $\{U_t,V_t\}_{0\leq t\leq T}$, $\{U'_t,V'_t\}_{0\leq t\leq T}$ deux éléments de $\mathcal{S}^p\times\mathrm{M}^p$ et $\{Y_t,Z_t\}_{0\leq t\leq T}$, $\{Y'_t,Z'_t\}_{0\leq t\leq T}$ les solutions respectives de l'EDSR (3). On note $\delta Y = Y - Y'$, $\delta Z = Z - Z'$, $\delta U = U - U'$ et $\delta V = V - V'$. Montrer qu'il existe une constante C_p ne dépendant que de p telle que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\delta Y_t|^p + \Big(\int_0^T \|\delta Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] \\
&\quad\leq \; C_p \max(T^{p/2},T^p)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\delta U_t|^p + \Big(\int_0^T \|\delta V_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right].
\end{aligned}$$

`Indic.` : écrire l'équation pour δY, prendre l'espérance conditionnelle, utiliser l'inégalité de Doob puis les inégalités BDG pour δZ.

4. En utilisant un argument de point fixe, montrer que l'EDSR (2) possède une unique solution dans $\mathcal{S}^p \times \mathrm{M}^p$ (on pourra commencer par T petit). A-t-on unicité des solutions au sens de la définition ?

5. On suppose ici $p > 2$ ($p = 2$ vu en cours). Montrer qu'il existe une constante C_p universelle telle que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\alpha t/2}|Y_t|^p + \Big(\int_0^T e^{\alpha t}\|Z_t\|^2 dt\Big)^{p/2}\right] \leq C_p\,\mathbb{E}\left[e^{p\alpha T/2}|\xi|^p + \Big(\int_0^T e^{\alpha t/2}\big|f(t,0,0)\big|dt\Big)^p\right],$$

où $\alpha = 2K^2 + 2K$ et $\{Y_t, Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ est la solution de l'EDSR (2).
`Indic.` : on pourra d'abord appliquer la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|Y_t|^2$.

Exercice 3. Soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{S}(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et elliptique où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'on peut remplacer $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ par $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dans la définition de u est sous-solution de viscosité de $F(x, u, \nabla u, \mathrm{D}^2 u) = 0$.

Institut Mathématique
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année universitaire 1999/2000

EDSR et applications : Correction de l'examen du 29 mars 2000.

Exercice 1. 1. g est Lipschitz et le processus $\{g(t,0,0)\}_{0\leq t\leq T}$ est trivialement de carré intégrable puisqu'il est nul. L'EDSR (1) possède donc une unique solution si $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$.

2. a. On a $\mathcal{E}_g(c) = c$ car la solution de l'EDSR (1) avec $\xi = c$ est $\{c, 0\}_{0\leq t\leq T}$ puisque $g(t, y, 0) \equiv 0$.

b. C'est le théorème de comparaison qui fournit immédiatement le résultat puisqu'on travaille avec le même générateur.

c. L'hypothèse (ii) implique, si $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_S)$, que la solution de l'EDSR (1) est donnée, pour $S \leq t \leq T$, par $(Y_t, Z_t) = (\xi, 0)$ et, pour $0 \leq t \leq S$, par $(Y_t, Z_t) = (y_t, z_t)$. Le résultat s'en suit immédiatement.

3. a. Fixons $A \in \mathcal{F}_t$. Pour tout $t \leq u \leq T$, on a,

$$\mathbf{1}_A Y_u = \mathbf{1}_A \xi + \mathbf{1}_A \int_u^T g(r, Y_r, Z_r)dr - \mathbf{1}_A \int_u^T Z_r \cdot dW_r,$$

et puisque, pour $t \leq u \leq T$, $\mathbf{1}_A$ est $\mathcal{F}_u$–mesurable, on en déduit que

$$\mathbf{1}_A Y_u = \mathbf{1}_A \xi + \int_u^T \mathbf{1}_A g(r, Y_r, Z_r)dr - \int_u^T \mathbf{1}_A Z_r \cdot dW_r.$$

Or, comme $g(t, y, 0) \equiv 0$, on a $\mathbf{1}_A g(t, y, z) = g(t, y, \mathbf{1}_A z) = g(t, \mathbf{1}_A y, \mathbf{1}_A z)$. Il vient alors, pour $t \leq u \leq T$,

$$\mathbf{1}_A Y_u = \mathbf{1}_A \xi + \int_u^T g(r, \mathbf{1}_A Y_r, \mathbf{1}_A Z_r)dr - \int_u^T \mathbf{1}_A Z_r \cdot dW_r.$$

Soit $\{U_t, V_t\}_{0\leq t\leq T}$ la solution de l'EDSR

$$U_t = \mathbf{1}_A \xi + \int_t^T g(r, U_r, V_r)dr - \int_t^T V_r \cdot dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Par définition, on a $\mathcal{E}_g(\mathbf{1}_A \xi) = U_0$. Mais le calcul précédent montre que $(U_r, V_r) = (\mathbf{1}_A Y_r, \mathbf{1}_A Z_r)$ pour $t \leq r \leq T$. En particulier, pour $0 \leq s \leq t$, on a :

$$U_s = \mathbf{1}_A Y_t + \int_s^t g(r, U_r, V_r)dr - \int_s^t V_r \cdot dW_r,$$

et la question 2.c montre que $\mathcal{E}_g(\mathbf{1}_A Y_t) = U_0$.

b. Soient η_1 et η_2 deux éléments de $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_t)$ vérifiant $\mathcal{E}_g(\mathbf{1}_A \eta_1) = \mathcal{E}_g(\mathbf{1}_A \eta_2)$ pour tout $A \in \mathcal{F}_t$. Prenons $A = \{\eta_1 \geq \eta_2\}$; on a $\mathcal{E}_g(\mathbf{1}_{\{\eta_1\geq\eta_2\}}\eta_1) = \mathcal{E}_g(\mathbf{1}_{\{\eta_1\geq\eta_2\}}\eta_2)$. Or $\mathbf{1}_{\{\eta_1\geq\eta_2\}}\eta_1 \geq \mathbf{1}_{\{\eta_1\geq\eta_2\}}\eta_2$, et donc, via la question 2.b, $\mathbf{1}_{\{\eta_1\geq\eta_2\}}\eta_1 = \mathbf{1}_{\{\eta_1\geq\eta_2\}}\eta_2$ $\mathbb{P}$–p.s. Pour conclure, il suffit alors de prendre $A = \{\eta_1 \leq \eta_2\}$ pour obtenir $\mathbf{1}_{\{\eta_1\leq\eta_2\}}\eta_1 = \mathbf{1}_{\{\eta_1\leq\eta_2\}}\eta_2$ $\mathbb{P}$–p.s. et par suite $\eta_1 = \eta_2$ $\mathbb{P}$–p.s.

4. a. Supposons que ξ soit $\mathcal{F}_t$–mesurable. Comme déjà remarqué lors de la question 2.c, la solution de l'EDSR (1) est $(\xi, 0)$ sur $[t, T]$ et donc, par définition, $\mathcal{E}_g(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \xi$. En particulier, pour tout réel c, $\mathcal{E}_g(c \mid \mathcal{F}_t) = c$.

b. C'est une conséquence directe du théorème de comparaison.

c. Fixons $B \in \mathcal{F}_t$. Par définition, on a, pour tout $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathcal{E}_g\left[\mathbf{1}_A\, \mathcal{E}_g(\mathbf{1}_B \xi \mid \mathcal{F}_t)\right] = \mathcal{E}_g\left[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \xi\right] = \mathcal{E}_g\left[\mathbf{1}_A\{\mathbf{1}_B\, \mathcal{E}_g(\xi \mid \mathcal{F}_t)\}\right],$$

qui implique le résultat.

5. Si $g(t,y,z) = b_t \cdot z$, l'EDSR est linéaire. On utilise la formule pour obtenir

$$\mathcal{E}_g(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\Big(\xi \exp\Big\{\int_t^T b_r \cdot dW_r - 1/2\int_t^T |b_r|^2 dr\Big\} \mid \mathcal{F}_t\Big) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\xi \mid \mathcal{F}_t),$$

où $\mathbb{Q}$ est la mesure sur $\mathcal{F}_T$ de densité par rapport à $\mathbb{P}$

$$D_T = \exp\Big\{\int_0^T b_r \cdot dW_r - 1/2\int_0^T |b_r|^2 dr\Big\}.$$

On retrouve ainsi les changements de mesures de probabilité de type Girsanov.

6. Les hypothèses (i) et (ii) impliquent que, pour tout (t,y,z),

$$\big|g(t,y,z)\big| = \big|g(t,y,z) - g(t,y,0)\big| \leq K|z|,$$

et donc que $-K|z| \leq g(t,y,z) \leq K|z|$. Il suffit d'appliquer le théorème de comparaison pour conclure.

Exercice 2. Dans la suite C_p désigne une constante dépendant de p variant au cours du texte.

1. Suposons que $\{Y_t, Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ soit solution de l'EDSR (2). On a alors

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)dr + \int_0^t Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

d'où l'on tire en utilisant la croissance de f,

$$|Y_t| \leq |Y_0| + \int_0^T \big\{\big|f(r,0,0)\big| + K\|Z_r\|\big\}dr + \sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t Z_r dW_r\Big| + K\int_0^t |Y_r|dr.$$

Comme la fonction $t \longmapsto Y_t$ est continue, le lemme de Gronwall donne $\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t| \leq e^{KT}\zeta$ avec

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^T \big\{\big|f(r,0,0)\big| + K\|Z_r\|\big\}dr + \sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t Z_r dW_r\Big|.$$

Il suffit alors d'utiliser la définition de solution, l'hypothèse d'intégrabilité sur $f(t,0,0)$, et de remarquer que les inégalités BDG donnent

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t Z_r dW_r\Big|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] < +\infty,$$

pour obtenir ζ dans L^p puisque Y_0 est déterministe.

2. Prenons $\{U_t, V_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathcal{S}^p \times \mathrm{M}^p$. Définissons alors,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)dr \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T f(r, U_r, V_r)dr \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t f(r, U_r, V_r)dr\,;$$

$\{Y_t\}_{0\leq t\leq T}$ est continu car les martingales browniennes le sont. On a de plus

$$|Y_t| \leq \mathbb{E}\left(|\xi| + \int_0^T \big|f(r,U_r,V_r)\big|dr \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right),$$

et donc d'après l'inégalité de Doob ($p>1$),

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^p\right] \leq \big(p/(p-1)\big)^p\mathbb{E}\left[\Big(|\xi| + \int_0^T \big|f(r,U_r,V_r)\big|dr\Big)^p\right];$$

le membre de droite est fini via les hypothèses d'intégrabilité sur ξ, U, V et $\{f(t,0,0)\}_{0\leq t\leq T}$.

D'après le théorème de représentation des martingales browniennes, il existe $\{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ progressivement mesurable tel que :

$$\mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T f(r,U_r,V_r)dr \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(r,U_r,V_r)dr\right] + \int_0^t Z_r dW_r, \qquad 0\leq t\leq T.$$

Les inégalités BDG donnent

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\int_0^t Z_r dW_r\Big|^p\right],$$

et donc on obtient

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\Big|\mathbb{E}\Big(\xi + \int_0^T f(r,U_r,V_r)dr \mid \mathcal{F}_t\Big)\Big|^p\right],$$

d'où il résulte via l'inégalité de Doob ($p>1$!),

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\Big(|\xi| + \int_0^T \big|f(r,U_r,V_r)\big|dr\Big)^p\right]$$

qui est fini comme déjà dit.

Enfin, par définition de Y et Z, on a

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T f(r,U_r,V_r)dr \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t f(r,U_r,V_r)dr \\ &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(r,U_r,V_r)dr\right] + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t f(r,U_r,V_r)dr. \end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(r,U_r,V_r)dr\right] = \xi + \int_0^T f(r,U_r,V_r)dr - \int_0^T Z_r dW_r,$$

d'où l'on déduit que

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,U_r,V_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r.$$

3. Le point de départ est

$$\delta Y_t = \int_t^T \big(f(r,U_r,V_r) - f(r,U'_r,V'_r)\big)dr - \int_t^T \delta Z_r dW_r, \qquad 0\leq t\leq T.$$

Come δZ appartient à M^p, $M_\cdot = \int_0^\cdot \delta Z_r dW_r$ est une martingale bornée dans L^p. Donc, prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$, on obtient, en utilisant le fait que f est Lipschitz :

$$|\delta Y_t| \leq K\mathbb{E}\left(\int_0^T \big(|\delta U_r| + \|\delta V_r\|\big) dr \;\Big|\; \mathcal{F}_t\right).$$

Puisque $p > 1$, l'inégalité de Doob donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \big(|\delta U_r| + \|\delta V_r\|\big) dr\Big)^p\right],$$

et l'inégalité de Hölder fournit la majoration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^p\right] &\leq C_p 2^{p-1}\left(T^p\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta U_t|^p\right] + T^{p/2}\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \|\delta V_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right]\right)\\ &\leq C_p \max(T^p, T^{p/2})\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta U_t|^p + \Big(\int_0^T \|\delta V_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right].\end{aligned}$$

Pour Z, les inégalités BDG et l'inégalité de Doob donnent

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T \|\delta Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\Big|\int_0^T \delta Z_r dW_r\Big|^p\right];$$

Or, nous avons

$$\int_0^T \delta Z_r dW_r = \int_0^T \big\{f(r, U_r, V_r) - f(r, U'_r, V'_r)\big\} dr - \delta Y_0,$$

et donc, f étant Lipschitz,

$$\Big|\int_0^T \delta Z_r dW_r\Big| \leq K\int_0^T \big(|\delta U_r| + \|\delta V_r\|\big) dr + \sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t.|$$

Or nous avons estimé l'espérance de la puissance p^{e} de chacun des deux termes ; il vient donc

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta Y_t|^p + \Big(\int_0^T \|\delta Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right]\\ &\quad\leq C_p \max(T^p, T^{p/2})\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\delta U_t|^p + \Big(\int_0^T \|\delta V_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right].\end{aligned}$$

4. On se place dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^p = \mathcal{S}^p_{\mathrm{c}} \times \mathrm{M}^p$ et on considère l'application Ψ qui à (U, V) associe (Y, Z) solution de l'EDSR (3). D'après la question 2, Ψ est une application de $\mathcal{B}^p$ dans lui-même qui s'avère être une contraction stricte si on suppose de plus que $C_p \max(T^p, T^{p/2}) < 1$. Donc, sous cette condition, Ψ possède un unique point fixe dans $\mathcal{B}^p$ et donc l'EDSR (2) possède une unique solution dans $\mathcal{B}^p$. Pour T quelconque, il suffit de subdiviser l'intervalle $[0, T]$ en un nombre fini d'intervalles de longueurs suffisamment petites pour obtenir une unique solution de l'EDSR dans $\mathcal{B}^p$.

On obtient bien sûr unicité des solutions au sens de la définition puisque via la question 1, toute solution vit dans $\mathcal{B}^p$.

5. Commençons avec la formule d'Itô,

$$e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr = e^{\alpha T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\big\{2Y_r \cdot f(r, Y_r, Z_r) - \alpha|Y_r|^2\big\} dr - 2\int_t^T e^{\alpha r} Y_r \cdot Z_r dW_r.$$

Or, f étant Lipschitz, on obtient, via $2ab \leq 2a^2 + b^2/2$,

$$\begin{aligned} 2Y_r \cdot f(r, Y_r, Z_r) &\leq 2K|Y_r|^2 + 2K|Y_r| \, \|Z_r\| + 2|Y_r| \, \big|f(r,0,0)\big| \\ &\leq (2K + 2K^2)|Y_r|^2 + \frac{1}{2}\|Z_r\|^2 + 2|Y_r| \, \big|f(r,0,0)\big|. \end{aligned}$$

Si on prend $\alpha = 2K + 2K^2$, on obtient

$$e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr \leq e^{\alpha T}|\xi|^2 + 2\int_t^T e^{\alpha r}|Y_r| \, \big|f(r,0,0)\big| dr - 2\int_t^T e^{\alpha r} Y_r \cdot Z_r dW_r. \quad (4)$$

Puisque $p > 2$, les inégalités BDG montrent que l'intégrale stochastique est un accroissement de martingale ; conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_t$ il vient :

$$e^{\alpha t}|Y_t|^2 \leq \mathbb{E}\left(e^{\alpha T}|\xi|^2 + 2\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| \, \big|f(r,0,0)\big| dr \;\Big|\; \mathcal{F}_t \right),$$

et utilisant l'inégalité de Doob pour $p/2 > 1$, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\alpha t/2}|Y_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[e^{p\alpha T/2}|\xi|^p + \Big(\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| \, \big|f(r,0,0)\big| dr\Big)^{p/2}\right].$$

Revenant à l'inégalité (4) pour $t = 0$, on obtient en utilisant les inégalités BDG pour $p/2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] &\leq C_p \mathbb{E}\left[e^{p\alpha T/2}|\xi|^p + \Big(\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| \, \big|f(r,0,0)\big| dr\Big)^{p/2}\right] \\ &\quad + C_p \mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T e^{2\alpha r}|Y_r|^2\|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/4}\right]. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$C_p \mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T e^{2\alpha r}|Y_r|^2\|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/4}\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\alpha t/4}|Y_t|^{p/2}\Big(\int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/4}\right],$$

et donc

$$C_p \mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T e^{2\alpha r}|Y_r|^2\|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/4}\right] \leq \frac{C_p^2}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\alpha t/2}|Y_t|^p\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right].$$

Combinant, comme à l'habitude ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\alpha t/2}|Y_t|^p + \Big(\int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\Big)^{p/2}\right] \\ &\quad \leq C_p \, \mathbb{E}\left[e^{p\alpha T/2}|\xi|^p + \Big(\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| \, \big|f(r,0,0)\big| dr\Big)^{p/2}\right]. \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à remarquer que

$$\begin{aligned} &C_p \, \mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T e^{\alpha r}|Y_r| \, \big|f(r,0,0)\big| dr\Big)^{p/2}\right] \\ &\leq C_p \, \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\alpha t/4}|Y_t|^{p/2}\Big(\int_0^T e^{\alpha r/2}\big|f(r,0,0)\big| dr\Big)^{p/2}\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{p\alpha t/2}|Y_t|^p\right] + \frac{C_p^2}{2}\,\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T e^{\alpha r/2}\big|f(r,0,0)\big| dr\Big)^p\right]. \end{aligned}$$

Exercice 3. On suppose que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $u - \varphi$ possède au point $x_0 \in \Omega$ un maximum local on a

$$F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), \mathrm{D}^2\varphi(x_0)) \leq 0$$

et nous devons montrer que la propriété reste vraie si on prend φ de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}^2$ telle que $u - \varphi$ possède au point $x_0 \in \Omega$ un maximum local. Considérons, pour $n \geq 1$,

$$\varphi_n(x) = \varphi(x_0) + \nabla\varphi(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\langle \mathrm{D}^2\varphi(x_0)(x - x_0), (x - x_0)\rangle + \frac{1}{2n}|x - x_0|^2.$$

D'après la formule de Taylor appliquée à φ, on a pour $|x - x_0| \leq r$,

$$u(x) \leq u(x_0) + \nabla\varphi(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}\langle \mathrm{D}^2\varphi(x_0)(x - x_0), (x - x_0)\rangle + \circ(|x - x_0|^2),$$

et donc si $|x - x_0| \leq r$,

$$u(x) - \varphi_n(x) \leq u(x_0) - \varphi_n(x_0) + \circ(|x - x_0|^2) - \frac{1}{2n}|x - x_0|^2.$$

Il résulte de cette dernière inégalté que $u - \varphi_n$ possède un maximum local au point x_0, pour tout $n \geq 1$. Comme φ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi_n(x_0), \mathrm{D}^2\varphi_n(x_0)) \leq 0$, soit encore

$$F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), \mathrm{D}^2\varphi(x_0) + n^{-1}\mathrm{I}) \leq 0.$$

Il suffit de passer à la limite quand $n \to \infty$ pour obtenir le résultat par continuité de F.