Institut Mathématique de Rennes
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année universitaire 2000/2001

Filière II : EDS rétrogrades et applications

Examen final : durée 3 heures

Vendredi 30 mars 2001

Soit $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et dont la filtration naturelle augmentée est notée $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. T est un réel strictement positif. $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction aléatoire telle que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable et ξ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, $\mathcal{F}_T$–mesurable, de carré intégrable. On note $\mathcal{B}^2$ l'espace vectoriel $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k) \times \mathrm{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$; pour α réel, on note $\|\,.\,\|_\alpha$, la norme définie par

$$\big\|(Y,Z)\big\|_\alpha^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|Z_r\|^2 dr\right],$$

qui fait de $\mathcal{B}^2$ un espace de Banach.

Exercice 1. On suppose que (ξ, f) vérifie l'hypothèse (My) du cours ; on note K la constante de Lipschitz en z et μ la constante de montonie en y.

Soient $\varepsilon > 0$ et h une fonction intégrable sur $(0,T)$. On note $\mathrm{D}_\varepsilon(h)$ la fonction définie par

$$\forall t \in [0,T], \qquad \mathrm{D}_\varepsilon(h)_t = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^t h(r)\mathbf{1}_{r>0}\, dr.$$

1. Soient α, ε, p trois réels positifs tels que $\varepsilon > 0$ et $p \geq 1$; soit $h \in \mathrm{L}^p(0,T)$. Montrer que,

$$\forall 0 \leq t \leq T, \qquad \int_t^T e^{\alpha r}\big|\mathrm{D}_\varepsilon(h)_r\big|^p dr \leq e^{\alpha\varepsilon}\int_{(t-\varepsilon)^+}^T e^{\alpha r}|h(r)|^p dr.$$

2. a. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que, pour tout $V \in \mathrm{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\big(r, Y_r, \mathrm{D}_\varepsilon(V)_r\big)\, dr - \int_t^T Z_r\, dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

possède une unique solution dans $\mathcal{B}^2$.

b. Soient V et V' deux éléments de $\mathrm{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ et $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$, $\{(Y'_t, Z'_t)\}_{0\leq t\leq T}$ les solutions respectives de l'EDSR (1). Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2 dr\right] \leq C_u x\, \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\big\|\mathrm{D}_\varepsilon(\delta V)_r\big\|^2 dr\right],$$

où $\delta Y = Y - Y'$, $\delta Z = Z - Z'$, $\delta V = V - V'$, $\alpha = (2\mu + K^2/x)^+$ et C_u désigne une constante universelle.

3. En déduire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, l'EDSR

$$Y_t^\varepsilon = \xi + \int_t^T f\big(r, Y_r^\varepsilon, \mathrm{D}_\varepsilon(Z^\varepsilon)_r\big)\, dr - \int_t^T Z_r^\varepsilon\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

possède une unique solution, $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon)\}_{0\le t\le T}$, dans $\mathcal{B}^2$.

4. On note $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\le t\le T}$ la solution de l'EDSR classique

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

Montrer que $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon)\}_{t\in[0,T]}$, solution de (2), converge dans $\mathcal{B}^2$, vers $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Indication : appliquer la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|Y_t^\varepsilon - Y_t|^2$ en essayant d'obtenir $\|Z - \mathrm{D}_\varepsilon(Z)\|^2$ (en norme M^2) comme terme de contrôle ; on rappelle que, si $h \in \mathrm{L}^2(0,T)$, $\mathrm{D}_\varepsilon(h)$ converge vers h dans L^2 quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice 2. On suppose que $k = 1$ et qu'il existe une constante $K \ge 0$, telle que, $\mathbb{P}$–p.s.,

- $\forall t \in [0,T]$, $\quad (y,z) \longmapsto f(t,y,z)$ est continue ;
- $\forall (t,y,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, $\quad \big|f(t,y,z)\big| \le h(y,z)$, où $h(y,z) = K\big(1 + |y| + |z|\big)$.

On pose, pour $n \ge K$, pour tout $(t,y,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$,

$$f_n(t,y,z) = \inf\big\{ f(t,u,v) + n|y-u| + n|z-v| \; ; \; (u,v) \in \mathbb{Q}^{d+1} \big\}.$$

On a alors, pour tout $n \ge K$, pour tout (t,y,z,y',z'),

1. $\big|f_n(t,y,z)\big| \le K\big(1+|y|+|z|\big)$;
2. $\big|f_n(t,y,z) - f_n(t,y',z')\big| \le n\big(|y-y'| + |z-z'|\big)$;
3. $\big(f_n(t,y,z)\big)_n$ est croissante ;
4. si $(y_n, z_n) \longrightarrow (y,z)$, $f_n(t,y_n,z_n) \longrightarrow f(t,y,z)$.

On note $\{(U_t, V_t)\}_{t\in[0,T]}$ la solution de l'EDSR

$$U_t = \xi + \int_t^T h(U_r, V_r)\, dr - \int_t^T V_r\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

et, pour $n \ge K$, $\{(Y_t^n, Z_t^n)\}_{t\in[0,T]}$ celle de l'EDSR

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_n(r, Y_r^n, Z_r^n)\, dr - \int_t^T Z_r^n\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

1. Justifier brièvement l'existence des solutions des EDSR précédentes.

2. a. Montrer que, $\mathbb{P}$-p.s., pour tout $n \ge K$,

$$\forall t \in [0,T], \qquad Y_t^n \le Y_t^{n+1} \le U_t.$$

b. Montrer qu'il existe une constante M, dépendant de T, K et $\mathbb{E}\big[\xi^2\big]$, telle que, pour tout $n \ge K$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |Y_t^n|^2 + \int_0^T |Z_r^n|^2\, dr\right] \le M.$$

3. a. En utilisant la question 2, montrer que $\{Y_t^n\}_{t\in[0,T]}$ en une suite de Cauchy dans $\mathrm{M}^2(\mathbb{R})$.

b. En déduire, que la suite $\{(Y_t^n, Z_t^n)\}_{t\in[0,T]}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}^2$.

4. Soit $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ la limite de la suite $\{(Y_t^n, Z_t^n)\}_{t\in[0,T]}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$. Montrer que $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ est solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\, dr - \int_t^T Z_r\, dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

5. En utilisant le théorème de comparaison, montrer que l'application $\mathcal{E}$ de $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$ dans $\mathbb{R}$ qui à ξ associe $\mathcal{E}(\xi) = U_0$ où $\{(U_t, V_t)\}_{t\in[0,T]}$ est la solution de l'EDSR (3) est convexe. Indication : h est convexe.

6. Démontrer les propriétés de la suite $(f_n)_{n\geq K}$ rappelées en préambule.

Institut Mathématique
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année universitaire 2000/2001

EDSR et applications : Correction de l'examen du 30 mars 2001.

Exercice 1. 1. Soient $p \geq 1$ un réel, $h \in \mathrm{L}^p(0,T)$, et α un réel positif et $\varepsilon > 0$. L'inégalité de Hölder donne, pour $r \in [0,T]$,

$$\big|\mathrm{D}_\varepsilon(h)_r\big|^p \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{r-\varepsilon}^r |h(u)|^p \mathbf{1}_{u>0}\, du.$$

Il vient alors, par Fubini,

$$\int_t^T e^{\alpha r}\big|\mathrm{D}_\varepsilon(h)_r\big|^p dr \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_t^T e^{\alpha r}\int_{r-\varepsilon}^r |h(u)|^p\mathbf{1}_{u>0} du\, dr = \frac{1}{\varepsilon}\int_{(t-\varepsilon)^+}^T |h(u)|^p \int_t^T e^{\alpha r}\mathbf{1}_{u<r<u+\varepsilon}\, dr\, du,$$

et par suite, on obtient l'inégalié, comme $\alpha \geq 0$,

$$\int_t^T e^{\alpha r}\big|\mathrm{D}_\varepsilon(h)_r\big|^p dr \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{(t-\varepsilon)^+}^T |h(u)|^p \int_u^{u+\varepsilon} e^{\alpha r}\, dr\, du \leq e^{\alpha\varepsilon}\int_{(t-\varepsilon)^+}^T e^{\alpha u}|h(u)|^p\, du.$$

2. a. Si on se donne $V \in \mathrm{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, l'EDSR (1) possède une unique solution dans $\mathcal{B}^2$ car l'hypothèse (My) est satisfaite pour $g(r,y) = f(r,y,\mathrm{D}_\varepsilon(V)_r)$. La monotonie et la continuité sont évidentes ; on a $\big|g(r,y)\big| \leq f_t + K\big\|\mathrm{D}_\varepsilon(V)_r\big\| + \lambda|y|$ et l'inégalité (1) donne pour $p=2$ et $\alpha = 0$,

$$\int_0^T \big\|\mathrm{D}_\varepsilon(V)_r\big\|^2 dr \leq \int_0^T \|V_r\|^2 dr,$$

ce qui montre que $\mathrm{D}_\varepsilon(V)$ appartient à $\mathrm{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ et donne (My). On peut donc appliquer le résultat d'existence et d'unicité du Chapitre 4.

b. On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2$. Comme f est μ–monotone en y et K–Lipschitz en z, pour tout (r,y,z,y',z'), on a, pour tout $x > 0$,

$$2(y-y').\big(f(r,y,z)-f(r,y',z')\big) \leq 2\mu|y-y'|^2 + 2K|y-y'|\,\|z-z'\| \leq (2\mu+K^2/x)|y-y'|^2 + x\|z-z'\|^2.$$

On en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2 &+ \int_t^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2 dr \\ &\leq \quad (-\alpha+2\mu+K^2/x)\int_t^T e^{\alpha r}|\delta Y_r|^2 dr + x\int_0^T e^{\alpha r}\big\|\mathrm{D}_\varepsilon(\delta V)_r\big\|^2 dr - 2\int_t^T e^{\alpha r}\delta Y_r\,\delta Z_r\, dW_r. \end{aligned}$$

On prend $\alpha = (2\mu + K^2/x)^+$. Pour $t = 0$, on obtient, en prenant l'espérance,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2 dr\right] \leq x\,\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\big\|\mathrm{D}_\varepsilon(\delta V)_r\big\|^2 dr\right],$$

puis, via les inégalités BDG, pour une constante C_u universelle,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2 dr\right] \leq C_u x\,\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\big\|\mathrm{D}_\varepsilon(\delta V)_r\big\|^2 dr\right].$$

3. D'après l'inégalité (1), on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2dr\right]\le C_u x e^{\alpha\varepsilon}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|\delta V_r\|^2dr\right].$$

On choisit x de sorte que $C_u x<1$ ce qui fixe la valeur de α. Si $\varepsilon\to 0$, $C_u x e^{\alpha\varepsilon}\longrightarrow C_u x$ et par suite, si $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2+\int_0^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2dr\right]\le \rho\,\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|\delta V_r\|^2dr\right],$$

avec $\rho<1$. On introduit l'application Ψ du Banach $\mathcal{B}^2$ dans lui-même qui à un couple (U,V) associe (Y,Z) solution de l'équation (1). On vient d'établir que si $\varepsilon\le\varepsilon_0$, Ψ est une contraction stricte pour la norme $\|\,.\,\|_\alpha$. Ψ possède un unique point fixe $(Y^\varepsilon,Z^\varepsilon)$ qui est l'unique solution de l'EDSR (2).

4. Passons à l'étude de la convergence. On commence par le calcul classique,

$$\begin{aligned}
&e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2dr+\alpha\int_t^T e^{\alpha r}|\delta Y_r|^2dr\\
&\quad= \;2\int_t^T e^{\alpha r}\delta Y_r\cdot\{f(r,Y_r,Z_r)-f(r,Y_r^\varepsilon,\mathrm{D}_\varepsilon(Z^\varepsilon)_r)\}dr-2\int_t^T e^{\alpha r}\delta Y_r\cdot\delta Z_r dW_r,
\end{aligned}$$

et l'on coupe en trois morceaux :

$$\begin{aligned}
&f(r,Y_r,Z_r)-f(r,Y_r^\varepsilon,\mathrm{D}_\varepsilon(Z^\varepsilon)_r)\\
&\quad= \;\{f(r,Y_r,Z_r)-f(r,Y_r,\mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r)\}+\{f(r,Y_r,\mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r)-f(r,Y_r,\mathrm{D}_\varepsilon(Z^\varepsilon)_r)\}\\
&\qquad+\{f(r,Y_r,\mathrm{D}_\varepsilon(Z^\varepsilon)_r)-f(r,Y_r^\varepsilon,\mathrm{D}_\varepsilon(Z^\varepsilon)_r)\}\,.
\end{aligned}$$

On utilise alors le fait que f est Lipschitz et monotone, l'inégalité $2ab\le a^2/x+xb^2$ et l'on obtient, en prenant $\alpha=(3K^2+2\mu)^+$,

$$\begin{aligned}
&e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2dr\\
&\quad\le\;\int_t^T e^{\alpha r}\big\|Z_r-\mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r\big\|^2dr+\frac12\int_t^T e^{\alpha r}\big\|\mathrm{D}_\varepsilon(\delta Z)_r\big\|^2dr-2\int_t^T e^{\alpha r}\delta Y_r\cdot\delta Z_r dW_r,
\end{aligned}$$

ce qui compte tenu de l'inégalité (1) fournit

$$\begin{aligned}
&e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2dr\\
&\quad\le\;\int_0^T e^{\alpha r}\big\|Z_r-\mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r\big\|^2dr+\frac12 e^{\alpha\varepsilon}\int_{(t-\varepsilon)^+}^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2dr-2\int_t^T e^{\alpha r}\delta Y_r\cdot\delta Z_r dW_r.
\end{aligned}$$

Si donc $\varepsilon\le\varepsilon_1$, de sorte que $e^{\alpha\varepsilon}/2\le 2/3$, on a

$$\begin{aligned}
&e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2dr\\
&\quad\le\;\int_0^T e^{\alpha r}\big\|Z_r-\mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r\big\|^2dr+\frac23\int_{(t-\varepsilon)^+}^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2dr-2\int_t^T e^{\alpha r}\delta Y_r\cdot\delta Z_r dW_r,
\end{aligned}$$

ce qui donne tout d'abord, en prenant l'espérance pour $t=0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2 dr\right] \le 3\,\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\big\|Z_r - \mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r\big\|^2 dr\right].$$

Finalement, utilisant les inégalités BDG, on obtient pour une constante universelle C_u,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha t}|\delta Y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|\delta Z_r\|^2 dr\right] \le C_u\,\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\big\|Z_r - \mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r\big\|^2 dr\right].$$

Il suffit donc de montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \big\|Z_r - \mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r\big\|^2 dr\right]$$

tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ pour conclure. $\mathbb{P}$–p.s., $r \longmapsto Z_r$ appartient à L^2. Donc, $\mathbb{P}$–p.s.,

$$\int_0^T \big\|Z_r - \mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r\big\|^2 dr, \qquad \text{si} \quad \varepsilon \to 0.$$

Or, via l'inégalité (1), nous avons

$$\sup_{\varepsilon>0}\int_0^T \big\|Z_r - \mathrm{D}_\varepsilon(Z)_r\big\|^2 dr \le 2\int_0^T \|Z_r\|^2 dr$$

qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée donne le résultat.

Exercice 2. 1. f_n et h sont Lipschitziennes en (y,z) ; on peut donc appliquer le résultat classique de Pardoux–Peng.

2. a. On a, pour tout $n \ge K$, d'après les propriétés 1 et 3 de la suite $(f_n)_n$, pour tout $n \ge K$,

$$\forall (t,y,z), \qquad f_n(t,y,z) \le f_{n+1}(t,y,z) \le h(y,z) \ ;$$

il suffit d'appliquer le théorème de comparaison pour conclure.

b. Pour tout $n \ge K$, la première propriété de la suite $(f_n)_n$, conduit à

$$\forall n \ge K, \quad \forall (t,y,z), \qquad y\, f_n(t,y,z) \le K\big(|y| + |y|^2 + |y|\,|z|\big).$$

Les estimations à priori – Proposition 4.2 – donnent, pour tout $n \ge K$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|Y_t^n|^2 + \int_0^T |Z_r^n|^2\, dr\right] \le C_u e^{2(K+K^2)T}\,\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + K^2T^2\right].$$

3. a. $\mathbb{P}$–p.s., pour tout $t \in [0,T]$ la suite $(Y_t^n)_n$ est croissante et majorée par U_t. Donc $(Y_t^n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers Y_t. De plus, on a, $\mathbb{P}$–p.s. pour tout t

$$\sup\nolimits_{n\ge K}\left|Y_t^n\right| \le \max\left(\left|Y_t^K\right|, \left|U_t\right|\right),$$

et ce dernier majorant appartient à $\mathrm{M}^2(\mathbb{R})$. Le théorème de convergence dominée implique la convergence de Y^n vers Y dans $\mathrm{M}^2(\mathbb{R})$.

b. La formule d'Itô conduit à l'inégalité, avec les notations usuelles, si $m \ge n \ge K$, pour tout $t \in [0,T]$,

$$|\delta Y_t|^2 + \int_t^T |\delta Z_r|^2\, dr \le 2\int_0^T |\delta Y_r|\,\big|f_m(r,Y_r^m,Z_r^m) - f_n(r,Y_t^n,Z_r^n)\big|\, dr + 2\int_t^T \delta Y_r\, \delta Z_r\, dW_r \ ;$$

en particulier, pour $t=0$, on obtient,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta Z_r|^2\,dr\right] \le 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta Y_r|\,\big|f_m(r,Y_r^m,Z_r^m)-f_n(r,Y_t^n,Z_r^n)\big|\,dr\right],$$

puis les inégalités BDG, donnent pour C_u universelle,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\delta Y_t|^2+\int_0^T |\delta Z_r|^2\,dr\right] \le C_u\,\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta Y_r|\,\big|f_m(r,Y_r^m,Z_r^m)-f_n(r,Y_t^n,Z_r^n)\big|\,dr\right].$$

L'inégalité de Hölder entraîne, notant $\|\,.\,\|$ la norme dans M^2,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\delta Y_t|^2+\int_0^T |\delta Z_r|^2\,dr\right] \le C_u\,\big\|\delta Y\big\|\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T \big|f_m(r,Y_r^m,Z_r^m)-f_n(r,Y_t^n,Z_r^n)\big|^2\,dr\right]\right)^{1/2}.$$

Or, la première propriété de la suite $(f_n)_n$ et le résultat de la question 2. b. impliquent que

$$\sup_{m\ge n\ge K}\mathbb{E}\left[\int_0^T \big|f_m(r,Y_r^m,Z_r^m)-f_n(r,Y_t^n,Z_r^n)\big|^2\,dr\right]<+\infty.$$

Le résultat en découle.

4. Notons (Y,Z) la limite de la suite (Y^n,Z^n) dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$. On veut passer à la limite terme à terme dans l'équation

$$Y_t^n=\xi+\int_t^T f_n(r,Y_r^n,Z_r^n)\,dr-\int_t^T Z_r^n\,dW_r,\qquad 0\le t\le T.$$

Pour cela notons tout d'abord que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^n-Y_t|^2+\Big|\int_t^T Z_r^n\,dW_r-\int_t^T Z_r\,dW_r\Big|^2\right]\le 2\,\Big\|\big(Y^n,Z^n\big)-\big(Y,Z\big)\Big\|_0^2\longrightarrow 0.$$

Il reste à étudier la convergence du terme absolument continu ; pour cela notons que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_t^T f_n(r,Y_r^n,Z_r^n)\,dr-\int_t^T f(r,Y_r,Z_r)\,dr\Big|^2\right]\\ \le\;& T\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \big|f_n(r,Y_r^n,Z_r^n)-f(r,Y_r,Z_r)\big|^2\,dr\right].\end{aligned}$$

Comme (Y^n,Z^n) converge vers (Y,Z) pour la norme $\|\,.\,\|_0$, on a convergence de (Y_t^n,Z_t^n) vers (Y_t,Z_t) en $\mathbb{P}\otimes m$–mesure et, d'après la propriété 4 de la suite $(f_n)_n$, on en déduit que $f_n\big(t,Y_t^n,Z_t^n\big)$ converge vers $f\big(t,Y_t,Z_t\big)$ en $\mathbb{P}\otimes m$–mesure. Comme d'autre part,

$$\big|f_n\big(t,Y_t^n,Z_t^n\big)\big|\le K\left(1+|Y_t^n|+|Z_t^n|\right)$$

et que ce dernier converge dans M^2, on en déduit que la convergence de $f_n\big(t,Y_t^n,Z_t^n\big)$ vers $f\big(t,Y_t,Z_t\big)$ a lieu également dans M^2. Passant à la limite lorsque $n\to\infty$, on obtient

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(r,Y_r,Z_r)\,dr-\int_t^T Z_r\,dW_r,\qquad 0\le t\le T.$$

5. Montrons que l'application $\mathcal{E}$ est convexe. Soient ξ^1, ξ^2 deux v.a. $\mathcal{F}_T$–mesurable, de carré intégrable et $0 \le \alpha \le 1$. On pose $\xi = \alpha\xi^1 + (1-\alpha)\xi^2$ et l'on note (U^1, V^1), (U^2, V^2) et (U, V) les solutions de l'EDSR (3) associées à ξ^1, ξ^2 et ξ. On note enfin $U' = \alpha U^1 + (1-\alpha)U^2$ et $V' = \alpha V^1 + (1-\alpha)V^2$. Avec ces notations, nous devons montrer que

$$\mathcal{E}\big(\alpha\xi^1 + (1-\alpha)\xi^2\big) = \mathcal{E}\big(\xi\big) = U_0 \le \alpha\mathcal{E}\big(\xi^1\big) + (1-\alpha)\mathcal{E}\big(\xi^2\big) = \alpha U_0^1 + (1-\alpha)U_0^2 = U_0'.$$

Un calcul élémentaire montre que,

$$U_t' = \xi + \int_t^T \big\{\alpha\, h\big(r, U_r^1, V_r^1\big) + (1-\alpha)h\big(r, U_r^2, V_r^2\big)\big\}\, dr - \int_t^T V_r'\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T,$$

et l'on a, par définition,

$$U_t = \xi + \int_t^T h\big(r, U_r, V_r\big)\, dr - \int_t^T V_r\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

Comme h est convexe en (y, z), on a par définition de U' et V',

$$h\big(r, U_r', V_r'\big) \le \alpha\, h\big(r, U_r^1, V_r^1\big) + (1-\alpha)h\big(r, U_r^2, V_r^2\big).$$

Le théorème de comparaison donne alors $U_0 \le U_0'$.

6. On note $x = (y, z)$ et $|x| = |y| + |z|$. $f_n(t, x) = \inf\big\{f(t, q) + n|x - q|\, ;\, q \in \mathbb{Q}^{d+1}\big\}$. On a, si $n \ge K$, via la croissance de f, pour tout $q \in \mathbb{Q}^{d+1}$,

$$-K\,(1 + |x|) \le -K\,(1 + |q| - |x - q|) \le f(t, q) + n|x - q|,$$

et donc passant à l'infimum

$$-K\,(1 + |x|) \le f_n(t, x) \le f(t, x) \le K\big(1 + |x|\big)\ ;$$

ceci montre que f_n est bien définie pour $n \ge K$ et en donne la croissance. Si (t, x) est fixé, la croissance de la suite $(f_n(t, x))_n$ est immédiate.

Montrons que f_n est n-Lipschitz en x uniformément en t. Soient t, x et x' fixés. On a

$$\forall q \in \mathbb{Q}^{d+1}, \qquad f_n(t, x) \le f(t, q) + n|x - q| \le f(t, q) + n|x' - q| + n|x - x'|,$$

et donc, en prenant l'infimum, $f_n(t, x) \le f_n(t, x') + n|x - x'|$; le résultat s'en suit par symétrie.

Supposons à présent que $x_n \longrightarrow x$. Pour tout $n \ge K$, prenons $q_n \in \mathbb{Q}^{d+1}$ tel que

$$f(t, x_n) \ge f_n(t, x_n) \ge f(t, q_n) + n|x_n - q_n| - 1/n. \tag{4}$$

Comme $|f(t, x)| \le K(1 + |x|)$, la bornitude de la suite (x_n) entraîne celle de la suite (q_n) puisque

$$K\,\big(1 + |x_n|\big) \ge -K\,\big(1 + |q_n|\big) + n|q_n| - n|x_n| - 1/n, \qquad \text{i.e.} \qquad (n - K)|q_n| \le (n + K)|x_n| + 2K + 1/n.$$

La croissance de f donne à présent la bornitude de la suite $(f(t, q_n))_n$. On a alors,

$$\limsup_{n\to\infty} n|x_n - q_n| \le \limsup_{n\to\infty} f(t, x_n) - f(t, q_n) + 1/n < \infty.$$

Par suite, $q_n \longrightarrow x$. Comme, d'après l'inégalité (4), $f(t, x_n) \ge f_n(t, x_n) \ge f(t, q_n) - 1/n$, la continuité de $x \longmapsto f(t, x)$ donne la dernière propriété.