Institut Mathématique de Rennes
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année universitaire 2001/2002

Filière II : EDS rétrogrades et applications

Examen final : durée 3 heures

Mercredi 03 avril 2002

$\{W_t\}_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et dont la filtration naturelle augmentée est notée $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Exercice 1. Soit ξ une variable aléatoire réelle, $\mathcal{F}_T$–mesurable, telle que $\mathbb{P}$–p.s. $0 \leq \xi \leq 1$; on note f la fonction réelle définie par $f(y) = y(1-y)$.

1. Montrer que l'EDSr associée à (ξ, f) – i.e. de condition terminale ξ et de générateur f – possède une solution $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$.
Indication : introduire la fonction $y \longmapsto y^+(1-y)^+$ et utiliser le théorème de comparaison.

2. Montrer que $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ est une surmartingale.

Exercice 2. ξ est une variable aléatoire réelle, positive, $\mathcal{F}_T$–mesurable et de carré intégrable. On note F la fonction réelle $F(y) = -y^2$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\xi^n = \xi \wedge n$, $F^n(y) = -\left(y^+ \wedge n\right)^2$.

a. Montrer que l'EDSr de paramètres (ξ^n, F^n) possède une unique solution dans $\mathcal{B}^2$ que l'on note $\{(Y_t^n, Z_t^n)\}_{t\in[0,T]}$.

b. En utilisant le théorème de comparaison, montrer que $\mathbb{P}$–p.s.,

$$\forall t \in [0,T], \qquad 0 \leq Y_t^n \leq n.$$

c. En déduire que (Y^n, Z^n) est une solution de l'EDSr de paramètres (ξ^n, F).

2. Montrer que la suite $\left((Y^n, Z^n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}^2$.

3. En déduire que l'EDSr associée à (ξ, F) possède une solution $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$.

4. Peut-on supprimer la condition « ξ positive » ?

Exercice 3. 1. On considère une famille de fonctions aléatoires $\{f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ de $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f^\varepsilon(t,y,z)\}_{t\in[0,T]}$ est progressivement mesurable ainsi qu'une famille de variables aléatoires $\{\xi^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ appartenant à $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$.

On suppose qu'il existe $K \geq 0$ telle que, $\mathbb{P}$–p.s., pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \quad \forall (y,z) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \qquad |f^\varepsilon(t,u,v) - f^\varepsilon(t,y,z)| \leq K\left(|u-y| + \|v-z\|\right).$$

On suppose également que $\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}\left[\int_0^T |f^\varepsilon(t,0,0)|^2\,dt\right] < +\infty$ et que

$$\forall t \in [0,T], \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left[|\xi^\varepsilon|^2 + \left|\int_0^t f^\varepsilon(r,0,0)\,dr\right|^2\right] = 0. \qquad (\sharp)$$

a. Justifier brièvement l'existence d'une solution $\{(Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon)\}_{t\in[0,T]}$ de l'EDSr

$$Y_t^\varepsilon = \xi^\varepsilon + \int_t^T f^\varepsilon(r, Y_r^\varepsilon, Z_r^\varepsilon)\, dr - \int_t^T Z_r^\varepsilon\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

b. Montrer que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left[|Y_t^\varepsilon|^2 + \int_0^T \|Z_r^\varepsilon\|^2\, dr\right] = 0.$$

Indication : chercher une EDSr satisfaite par $(U^\varepsilon, V^\varepsilon)$ avec $U_t^\varepsilon = Y_t^\varepsilon + \int_0^t f^\varepsilon(r,0,0)\, dr$ et $V_t^\varepsilon = Z_t^\varepsilon$ et appliquer les estimations à priori.

c. En considérant l'EDSr

$$Y_t^\varepsilon = \xi^\varepsilon + \int_t^T f^\varepsilon(r)\, dr - \int_t^T Z_r^\varepsilon\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T,$$

montrer que la condition ($\sharp$) est optimale pour obtenir la convergence de la question b.

On se place désormais pour simplifier dans le cas scalaire $k = d = 1$.

2. Soit g une fonction réelle de classe C_b^2 i.e. g est C^2 avec g, g' et g'' bornées.
On note u la solution de l'équation de la chaleur

$$\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}, \qquad u(T,x) = g(x).$$

a. Exprimer u à l'aide du mouvement brownien. (Formule de Feynman-Kac).

b. En déduire rapidement que u est de classe $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$.

c. Soit $k : [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que, pour $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t k\left(r, x+W_r\right)\sin\left(\frac{x+W_r}{\varepsilon}\right) dr\right|^2\right] = 0.$$

Indication : supposer k de classe C_b^2 et appliquer la formule d'Itô à $k(r,x+W_r)\sin\left(\varepsilon^{-1}(x+W_r)\right)$ entre 0 et t ; pour le cas général, utiliser une suite de fonctions k_n, C_b^2, qui converge vers k uniformément sur tout compact vérifiant $\|k_n\|_\infty \le \|k\|_\infty$.

3. Soit h une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ Lipschitzienne et bornée. Pour tout $\varepsilon > 0$, on désigne par F^ε la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F^\varepsilon(x,y,z) = \sin(x/\varepsilon)h(y,z)$. Si $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\{(Y_t^{\varepsilon,x}, Z_t^{\varepsilon,x})\}_{t\in[0,T]}$ la solution de l'EDSr

$$Y_t^{\varepsilon,x} = g(x+W_T) + \int_t^T F^\varepsilon(x+W_r, Y_r^{\varepsilon,x}, Z_r^{\varepsilon,x})\, dr - \int_t^T Z_r^{\varepsilon,x}\, dW_r, \qquad 0 \le t \le T.$$

a. Justifier rapidement l'existence de la solution de l'EDSr précédente.

b. En utilisant la question 1 et la question 2.c, montrer que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left[|Y_t^{\varepsilon,x} - u(t,x+W_t)|^2\right] = 0.$$

Indication : chercher une EDSr satisfaite par $U_t^\varepsilon = Y_t^{\varepsilon,x} - u(t,x+W_t)$ et $V_t^\varepsilon = Z_t^{\varepsilon,x} - \partial_x u(t,x+W_t)$.

c. En déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u^\varepsilon(0,x) = u(0,x)$ où, pour $\varepsilon > 0$, u^ε désigne la solution de viscosité de l'EDP

$$\partial_t u^\varepsilon(t,x) + \frac{1}{2}\partial_x^2 u^\varepsilon(t,x) + F^\varepsilon(x, u^\varepsilon(t,x), \partial_x u^\varepsilon(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}, \qquad u^\varepsilon(T,x) = g(x).$$

Institut Mathématique
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année universitaire 2001/2002

EDSr et applications : Correction de l'examen du 03 avril 2002.

Exercice 1. 1. La fonction f n'est pas Lipschitzienne et ne vérifie pas la condition de monotonie puisque $yf(y)/y^2 = (1-y) \longrightarrow +\infty$ si $y \longrightarrow -\infty$. Considérons la fonction $g(y) = y^+(1-y)^+$. g est Lipschitzienne puisque $g(y) = \int_0^y (1-2x)\mathbf{1}_{]0,1[}(x)\,dx$. Le théorème de Pardoux-Peng fournit donc une unique solution de carré intégrable de l'EDSr associée à (ξ, g), disons (Y, Z). Puisque $g(1) = g(0) = 0$, $(0,0)$ est la solution de l'EDSr de paramètres $(0, g)$ et $(1,0)$ est celle associée à $(1, g)$. Comme $0 \le \xi \le 1$, le théorème de comparaison implique que, $\mathbb{P}$–p.s.,

$$\forall t \in [0,T], \qquad 0 \le Y_t \le 1.$$

Comme sur $[0,1]$, g et f sont égales, (Y, Z) est une solution associée à (ξ, f).

2. Montrons que Y est une surmartingale. Si $0 \le s \le t \le T$, on a,

$$Y_s = Y_t + \int_s^t Y_r\,(1-Y_r)\,dr - \int_s^t Z_r\,dW_r,$$

et en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_s$, on obtient, comme Z est de carré intégrable,

$$Y_s = \mathbb{E}\left(Y_t + \int_s^t Y_r\,(1-Y_r)\,dr \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right) \ge \mathbb{E}\left(Y_t \mid \mathcal{F}_s\right)$$

puisque pour tout $r \in [0,T]$, $f(Y_r) \ge 0$.

Exercice 2. 1. a. La fonction F^n est décroissante sur $\mathbb{R}$, Lipschitzienne et bornée ; ξ^n est de carré intégrable. Les hypothèses du théorème de Pardoux-Peng sont satisfaites. Notons (Y^n, Z^n) la solution ainsi obtenue.

b. On a $F^n(0) = 0$; on en déduit que $(0,0)$ est la solution de l'EDSr de paramètres $(0, F^n)$. ξ^n étant positive, le théorème de comparaison implique que $\mathbb{P}$-p.s., pour tout $t \in [0,T]$, $Y_t^n \ge 0$. D'autre part, $(n, 0)$ est la solution de l'EDSr de paramètres $(n, 0)$. Comme F^n est négative et $\xi^n \le n$, le théorème de comparaison donne aussi la seconde inégalité.

c. Comme F^n et F sont égales sur l'intervalle $[0,n]$, (Y^n, Z^n) est solution de l'EDSr de paramètres (ξ^n, F).

2. Soient $m \ge n \ge 1$. On a, d'après la question précédente, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} &|Y_t^m - Y_t^n|^2 + \int_t^T \|Z_r^m - Z_r^n\|^2\,dr \\ &\quad = \; |\xi^m - \xi^n|^2 + 2\int_t^T (Y_r^m - Y_r^n)\,(F(Y_r^m) - F(Y_r^n))\,dr - 2\int_t^T (Y_r^m - Y_r^n)\,(Z_r^m - Z_r^n)\,dW_r. \end{aligned}$$

F étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, $(Y_r^m - Y_r^n)\,(F(Y_r^m) - F(Y_r^n)) \le 0$ et par suite,

$$|Y_t^m - Y_t^n|^2 + \int_t^T \|Z_r^m - Z_r^n\|^2\,dr \le |\xi^m - \xi^n|^2 - 2\int_t^T (Y_r^m - Y_r^n)\,(Z_r^m - Z_r^n)\,dW_r.$$

On obtient donc, via les inégalités BDG,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^m - Y_t^n|^2 + \int_0^T \|Z_r^m - Z_r^n\|^2\,dr\right] \le C_u\,\mathbb{E}\left[|\xi^m - \xi^n|^2\right],$$

ce qui montre que la suite de processus (Y^n, Z^n) est de Cauchy dans $\mathcal{B}^2$.

3. Notons (Y, Z) la limite de cette suite. Il reste à vérifier que (Y, Z) est solution de l'EDSr que nous cherchons à résoudre. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_t^n = \xi^n + \int_t^T F(Y_r^n)\,dr - \int_t^T Z_r^n\,dW_r, \qquad 0 \le t \le T,$$

et on doit passer à la limite dans cette équation. Pour cela, il suffit de remarquer que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T Z_r^n\,dW_r - \int_t^T Z_r\,dW_r\right|^2\right] \le 16\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_r^n - Z_r\|^2\,dr\right],$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T F(Y_r^n)\,dr - \int_t^T F(Y_r)\,dr\right|\right] \le 2T\,\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t - Y_t^n|^2\right]^{1/2} \sup_{n\ge1}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^n|^2\right]^{1/2}.$$

4. La condition de positivité est fondamentale ici : pour s'en convaincre il suffit de considérer le cas où ξ est déterministe, disons $\xi = c$. Il s'agit alors de résoudre l'équation différentielle $y' = y^2$ avec $y_T = c$. La solution est $y_t = c\,(1 + c(T-t))^{-1}$. La solution explose si $cT \le -1$.

Exercice 3. 1. a. Les hypothèses du théorème de Pardoux-Peng sont satisfaites. On obtient donc une unique solution $(Y^\varepsilon, Z^\varepsilon)$ dans $\mathcal{B}^2$.

b. On a $dU_t^\varepsilon = -f^\varepsilon(t, Y_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon)\,dt + f^\varepsilon(t,0,0)\,dt + Z_t^\varepsilon\,dW_t$, que l'on réécrit, notant, pour $t \in [0,T]$, $\psi_t^\varepsilon = \int_0^t f^\varepsilon(s,0,0)\,ds$,

$$dU_t^\varepsilon = -\left[f^\varepsilon\left(t, U_t^\varepsilon - \psi_t^\varepsilon, V_t^\varepsilon\right) - f^\varepsilon(t,0,0)\right]dt + V_t^\varepsilon\,dW_t.$$

On a alors

$$U_t^\varepsilon = \zeta^\varepsilon + \int_t^T g^\varepsilon(r, U_r^\varepsilon, V_r^\varepsilon)\,dr - \int_t^T V_r^\varepsilon\,dW_r, \qquad 0 \le t \le T,$$

avec $\zeta^\varepsilon = \xi^\varepsilon + \psi_T^\varepsilon$ et, pour tout $(t,u,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$,

$$g^\varepsilon(t,u,v) = f^\varepsilon\left(t, u - \psi_t^\varepsilon, v\right) - f^\varepsilon(t,0,0).$$

La fonction g^ε est K–Lipschitzienne ; les estimations à priori donnent, notant $\alpha = 2K + 2K^2$ et utilisant l'inégalité $|g^\varepsilon(r,0,0)| \le K|\psi_r^\varepsilon|$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|U_t^\varepsilon|^2 + \int_0^T \|V_r^\varepsilon\|^2\,dr\right] &\le C_u e^{\alpha T}\,\mathbb{E}\left[|\zeta^\varepsilon|^2 + \left|\int_0^T |g^\varepsilon(r,0,0)|\,dr\right|^2\right] \\ &\le C(K,T)\left(\mathbb{E}\left[|\xi^\varepsilon|^2 + |\psi_T^\varepsilon|^2\right] + \int_0^T \mathbb{E}\left[|\psi_r^\varepsilon|^2\right]\,dr\right).\end{aligned}$$

Par hypothèse, pour tout $t \in [0,T]$, $\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathbb{E}\left[|\xi^\varepsilon|^2 + |\psi_t^\varepsilon|^2\right] = 0$, et de plus,

$$\sup_{\varepsilon>0}\mathbb{E}\left[|\psi_t^\varepsilon|^2\right] \le T\,\sup_{\varepsilon>0}\mathbb{E}\left[\int_0^T |f^\varepsilon(r,0,0)|^2\,dr\right]$$

est fini donc intégrable sur $[0,T]$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que $(U^\varepsilon, V^\varepsilon)$ converge vers 0 dans $\mathcal{B}^2$. Le résultat s'en suit immédiatement.

c. Si on considère une famille d'EDSr dont les générateurs sont indépendants des variables, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|Y_t^\varepsilon|^2 + \int_t^T \|Z_r^\varepsilon\|^2\,dr\right] = \mathbb{E}\left[\left|Y_t^\varepsilon + \int_t^T Z_r^\varepsilon\,dW_r\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\xi^\varepsilon + \int_t^T f^\varepsilon(r)\,dr\right|^2\right].$$

Si on suppose que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left[|Y_t^\varepsilon|^2 + \int_0^T \|Z_r^\varepsilon\|^2\,dr\right] = 0$$

alors $\xi^\varepsilon \longrightarrow 0$ dans L^2 et de plus, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left[\left|\int_t^T f^\varepsilon(r)\,dr\right|^2\right] = 0,$$

ce qui montre que la condition $(\sharp)$ est optimale.

2. a. La formule de Feynman-Kac donne dans ce cas

$$\forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}, \qquad u(t,x) = \mathbb{E}\left[g(x+W_T-W_t)\right].$$

b. Le théorème de « dérivation sous le signe $\int$ »– les majorations sont triviales comme g est C_b^2 – montre directement que u est deux fois dérivable en x avec

$$\forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}, \qquad u_x(t,x) = \mathbb{E}\left[g'(x+W_T-W_t)\right], \quad u_{xx}(t,x) = \mathbb{E}\left[g''(x+W_T-W_t)\right] ;$$

ces deux fonctions sont continues sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ via le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

Reste à voir la dérivabilité en temps. Pour $0\le s<t\le T$, la formule de Taylor avec reste intégrale, donne, notant $X_t = x+W_T-W_t$,

$$\begin{aligned} g(X_s) &= g(X_t) + (W_t-W_s)\,g'(X_t) + \frac{(W_t-W_s)^2}{2}\,g''(X_t) \\ &\quad + (W_t-W_s)^2\int_0^1 (1-\alpha)\left[g''(X_t+\alpha(W_t-W_s)) - g''(X_t)\right]d\alpha, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, comme X_t et W_t-W_s sont indépendantes,

$$u(s,x) = u(t,x) + \frac{(t-s)}{2}\,\mathbb{E}\left[g''(X_t)\right] + (t-s)\,R(t,s),$$

où l'on a posé

$$R(t,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} z^2 \int_0^1 (1-\alpha)\left[g''(X_t+\alpha\sqrt{t-s}\,z) - g''(X_t)\right]d\alpha\, e^{-z^2/2}\,dz\right].$$

Comme $R(t,s)\longrightarrow 0$ si $t-s\to 0$, on déduit du calcul précédent que

$$\forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}, \qquad u_t(t,x) = -\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[g''(x+W_T-W_t)\right],$$

qui est une fonction continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.

c. Supposons dans un premier temps k de classe C^2_b. Notons $K^\varepsilon(t,x) = k(t,x)\,\sin(x/\varepsilon)$. On a alors, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,

$$K^\varepsilon_t(t,x) = k_t(t,x)\sin(x/\varepsilon), \qquad K^\varepsilon_x(t,x) = k_x(t,x)\sin(x/\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}k(t,x)\cos(x/\varepsilon),$$

$$K^\varepsilon_{xx}(t,x) = k_{xx}(t,x)\sin(x/\varepsilon) + \frac{2}{\varepsilon}k_x(t,x)\cos(x/\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^2}k(t,x)\sin(x/\varepsilon).$$

La formule d'Itô, donne alors,

$$K^\varepsilon(t,x+W_t) = K^\varepsilon(0,x)+\int_0^t G^\varepsilon(r,x+W_r)\,dr - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t K^\varepsilon(r,x+W_r)\,dr + \int_0^t K^\varepsilon_x(r,x+W_r)\,dW_r,$$

avec $G^\varepsilon(t,x) = K^\varepsilon_t(t,x) + \frac{1}{2}k_{xx}(t,x)\sin(x/\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}k_x(t,x)\cos(x/\varepsilon)$. Comme k est C^2_b, on obtient,

$$\left|\int_0^t K^\varepsilon(r,x+W_r)\,dr\right| \le C\varepsilon + \left|\int_0^t 2\varepsilon^2 K^\varepsilon_x(r,x+W_r)\,dW_r\right|,$$

et l'inégalité de Doob donne alors le résultat puisque $\sup_{t,x}\varepsilon^2|K^\varepsilon_x(t,x)| \le C\varepsilon$.

Si k est simplement continue et bornée, il existe une suite de fonctions C^2_b, k_n, qui converge vers k uniformément sur les compacts avec $\|k_n\|_\infty \le \|k\|_\infty$ – il suffit de faire une régularisation par convolution. On a alors,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t K^\varepsilon(r,x+W_r)\,dr\right|^2\right] \\
&\le\ 2\,\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t k_n(r,x+W_r)\,\sin\left(\varepsilon^{-1}(x+W_r)\right)dr\right|^2\right] + 2T\,\mathbb{E}\left[\int_0^T |k-k_n|^2\,(r,x+W_r)\,dr\right],
\end{aligned}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t K^\varepsilon(r,x+W_r)\,dr\right|^2\right] \le 2T\,\mathbb{E}\left[\int_0^T |k-k_n|^2\,(r,x+W_r)\,dr\right].$$

On a, d'autre part, pour $a>0$, notant $A_T = [0,T]\times[-a,a]$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |k-k_n|^2(r,x+W_r)\,dr\right] \le T\sup_{(t,x)\in A_T}|k-k_n|^2(t,x) + 4T\|k\|^2_\infty\,\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]}|x+W_t| > a\right),$$

ce qui montre le résultat en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ puis lorsque $a \to +\infty$.

3. a. Il suffit d'appliquer le théorème de Pardoux-Peng.

4. b u est de classe $C^{1,2}$ ce qui justifie l'emploi de la formule d'Itô. On a, comme u est solution de l'équation de la chaleur,

$$du(t,x+W_t) = (u_t + u_{xx}/2)\,(t,x+W_t)\,dt + u_x(t,x+W_t)\,dW_t = u_x(t,x+W_t)\,dW_t.$$

Par suite, $(U^\varepsilon, V^\varepsilon)$ est solution de l'EDSr

$$U^\varepsilon_t = \int_t^T f^\varepsilon(x+W_r, U^\varepsilon_r, V^\varepsilon_r)\,dr - \int_t^T V^\varepsilon_r\,dW_r, \qquad 0 \le t \le T,$$

avec $f^\varepsilon(t,y,z) = F^\varepsilon(x+W_t, y+u(t,x+W_t), z+u_x(t,x+W_t))$. Comme u est de classe $C^{1,2}$, la fonction $(t,x) \longmapsto h(u(t,x),u_x(t,x))$ est continue et bornée. La question 2.c implique que, pour tout $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t f^\varepsilon(r,0,0)\,dr\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sin\left(\varepsilon^{-1}(x+W_r)\right) h(u(r,x+W_r),u_x(r,x+W_r))\,dr\right|^2\right]$$

tend vers 0 si $\varepsilon \to 0^+$.

D'après la première question, on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{E}\left[|U_t^\varepsilon|^2 + \int_0^T |V_r^\varepsilon|^2\,dr\right] = 0.$$

a. Si u^ε désigne la solution de viscosité de l'EDP

$$u_t^\varepsilon + \frac{1}{2}\,u_{xx}^\varepsilon + F^\varepsilon(x,u^\varepsilon,u_x^\varepsilon) = 0, \qquad u^\varepsilon(T,\cdot) = g,$$

on a, via la formule de Feynman-Kac non-linéaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u^\varepsilon(0,x) = Y_0^{\varepsilon,x}$. Le résultat découle donc de la question précédente pour $t = 0$.