Institut Mathématique de Rennes
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année universitaire 2002/2003

Filière II : EDS rétrogrades et applications

Examen final : durée 3 heures

Mercredi 02 avril 2003

$\{W_t\}_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et dont la filtration naturelle augmentée est notée $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction aléatoire telle que $\{f(t,y,z)\}_{t\geq 0}$ est un processus progressivement mesurable pour tout $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$. On note $f(s)$ le processus $f(s,0,0)$ et on suppose qu'il existe une constante $\lambda \geq 0$ telle que $\mathbb{P}$–p.s., pour tout $t \geq 0$,

$$\forall (u,v),\ (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \qquad \big|f(t,u,v) - f(t,y,z)\big| \leq \lambda\big(|u-y| + \|v-z\|\big). \tag{L}$$

Exercice 1. Soit $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ fixé. On suppose, en plus de l'hypothèse (L), que, $\mathbb{P}$–p.s., $s \longmapsto f(s,y,z)$ est continue en 0 et que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq 1} |f(s)|^2\right] < +\infty.$$

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, (Y^n, Z^n) la solution de l'EDSr

$$Y_t^n = y + zW_{\frac{1}{n}} + \int_t^{\frac{1}{n}} f(s, Y_s^n, Z_s^n)\,ds - \int_t^{\frac{1}{n}} Z_s^n\,dW_s, \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{n}.$$

1. On définit, pour $0 \leq s \leq \frac{1}{n}$, $U_s^n = Y_s^n - (y + zW_s)$, $V_s^n = Z_s^n - z$.
   (a) Quelle est l'EDSr satisfaite par (U^n, V^n) ?
   (b) En déduire l'existence d'une constante C telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup\nolimits_{0\leq t\leq \frac{1}{n}} |U_t^n|^2 + \int_0^{\frac{1}{n}} \|V_s^n\|^2\,ds\right] \leq \frac{C}{n^2}.$$

2. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\,(Y_0^n - y) = f(0,y,z).$$

On pourra remarquer que $n\,(Y_0^n - y) = n\mathbb{E}\,[U_0^n]$.

Exercice 2. On suppose que $d = k = 1$. Soit $\xi = \exp\left\{\frac{W_1^2 - |W_1|}{2}\right\}$. Soit (Y^k, Z^k) la solution de l'EDSr

$$Y_t^k = \min(\xi, k) + \int_t^1 Z_s^k\,ds - \int_t^1 Z_s^k\,dW_s, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

1. Déterminer la limite de Y_0^k lorsque $k \to +\infty$.

2. À votre avis, peut-on résoudre, sous l'hypothèse (L), une EDSr dont la condition terminale est seulement intégrable ?

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'étudier l'existence et l'unicité des solutions d'une EDSr sur $[0,+\infty[$ c'est à dire d'une équation du type

$$-dY_t = f(t,Y_t,Z_t)\,dt - Z_t\,dW_t, \qquad t\geq 0. \tag{1}$$

Une solution de (1) est un couple de processus $(Y_t,Z_t)_{t\geq 0}$ progressivement mesurables tel que, pour tout $T\geq 0$,

$$Y_0 = Y_T + \int_0^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_0^T Z_s\,dW_s.$$

On suppose l'hypothèse (L) satisfaite et qu'il existe une constante $\mu\in\mathbb{R}$ telle que, $\mathbb{P}$–p.s., pour tout $(t,z)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{k\times d}$,

$$\forall u,\, y\in\mathbb{R}^k, \qquad (u-y)\cdot\big(f(t,u,z)-f(t,y,z)\big)\leq \mu|u-y|^2.$$

On suppose de plus que, pour tout $T>0$,

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T |f(s)|\,ds\Big)^2\right] < +\infty.$$

Soit $a\in\mathbb{R}$. $\mathcal{S}_c^{2,a}$ désigne l'ensemble des processus $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ progressivement mesurables, continus, tels que

$$\|Y\|_a^2 := \mathbb{E}\left[\sup\nolimits_{t\geq 0} e^{2at}|Y_t|^2\right] < +\infty,$$

tandis que $\mathrm{M}^{2,a}$ désigne l'ensemble des (classes d'équivalence de) processus Z progressivement mesurables vérifiant

$$\|Z\|_a^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{2as}\|Z_s\|^2\,ds\right] < +\infty\ ;$$

ce sont deux espaces de Banach pour les normes précédentes. Enfin, on note $\mathcal{B}^{2,a}$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^{2,a}\times\mathrm{M}^{2,a}$ muni de la norme

$$\big\|(Y,Z)\big\|_a^2 = \|Y\|_a^2 + \|Z\|_a^2.$$

On désigne, dans la suite, par (Y^n,Z^n) la solution sur $[0,n]$ de l'EDSr

$$Y_t^n = \int_t^n f(s,Y_s^n,Z_s^n)\,ds - \int_t^n Z_s^n\,dW_s, \qquad 0\leq t\leq n,$$

et on pose $Y_t^n=0$, $Z_t^n=0$ pour $t>n$.

1. Montrer, que si $0<\varepsilon<1$, pour tout $a\geq \mu+\lambda^2/(2\varepsilon)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup\nolimits_{t\in[0,n]} e^{2at}|Y_t^n|^2 + \int_0^n e^{2as}\|Z_s^n\|^2\,ds\right] \leq C(\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^n e^{as}|f(s)|\,ds\Big)^2\right],$$

où $C(\varepsilon)$ dépend uniquement de ε.

2. On suppose qu'il existe un réel $\rho>\mu+\lambda^2/2$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^\infty e^{\rho s}|f(s)|\,ds\Big)^2\right] < +\infty.$$

(a) Montrer que la suite (Y^n,Z^n) est de Cauchy dans $\mathcal{B}^{2,\rho}$. On pourra s'inspirer du calcul précédent.

(b) En déduire l'existence d'un processus (Y, Z), élément de $\mathcal{B}^{2,\rho}$, solution de (1).

(c) Montrer que (Y, Z) est l'unique solution de (1) dans $\mathcal{B}^{2,\rho}$.

3. On se place dans le cas scalaire soit $k = 1$; pour simplifier, on prend aussi $d = 1$.

On suppose à présent que $\mu < 0$ et $|f(s)| \leq K$.

(a) On suppose dans un premier temps que $f(s, y, z) = a(s)y + b(s)z + f(s)$, f vérifiant toujours les hypothèses précédentes i.e. a et b bornés par λ et $a(s) \leq \mu$. Montrer que pour tout n,

$$\forall t \geq 0, \qquad |Y_t^n| \leq \frac{K}{|\mu|}.$$

Indic. : Pensez à Girsanov.

(b) En utilisant une linéarisation du générateur, montrer la même majoration dans le cas général. On pourra définir

$$a(s) = \frac{f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, 0, Z_s^n)}{Y_s^n} \mathbf{1}_{Y_s^n \neq 0} + \mu \mathbf{1}_{Y_s^n = 0}, \quad b(s) = \frac{f(s, 0, Z_s^n) - f(s, 0, 0)}{Z_s^n} \mathbf{1}_{Z_s^n \neq 0}.$$

(c) En utilisant la même technique, montrer que la suite (Y^n) vérifie

$$\forall 0 \leq t \leq n, \qquad |Y_t^{n+p} - Y_t^n| \leq \frac{K}{|\mu|} e^{\mu(n-t)}.$$

(d) Montrer que la suite (Y^n) est de Cauchy dans $\mathrm{M}^{2,\mu}$ puis, en utilisant la formule d'Itô, qu'il en va de même de la suite (Z_n).

(e) En déduire l'existence d'une solution $(Y, Z) \in \mathrm{M}^{2,\mu}$ de (1) vérifiant Y est un processus borné.

(f) Montrer que (1) possède au plus une solution (Y, Z) telle que Y soit un processus borné et $Z \in \mathrm{M}^{2,\mu}$.

Institut Mathématique
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année universitaire 2002/2003

EDSr et applications : Correction de l'examen du 02 avril 2003.

Exercice 1. 1. (a) Un calcul élémentaire donne

$$U_t^n = \int_t^{\frac{1}{n}} g(s, U_s^n, V_s^n)\, ds - \int_t^{\frac{1}{n}} V_s^n\, dW_s, \qquad 0 \le t \le \frac{1}{n},$$

où $g(s,u,v) = f(s, u + y + zW_s, v + z)$.

(b) Les estimations à priori sur les EDSr donnent

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le \frac{1}{n}} |U_s^n|^2 + \int_0^{\frac{1}{n}} \|V_s^n\|^2\, ds\right] \le C_u e^{2(\lambda^2+\lambda)\frac{1}{n}}\, \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{n}} |g(s,0,0)|\, ds\right)^2\right],$$

d'où l'on tire – C désignant une constante variant au cours des lignes –

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le \frac{1}{n}} |U_s^n|^2 + \int_0^{\frac{1}{n}} \|V_s^n\|^2\, ds\right] \le \frac{C}{n}\, \mathbb{E}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} |g(s,0,0)|^2\, ds\right].$$

On a d'autre part, pour tout $0 \le s \le \frac{1}{n}$, $|g(s,0,0)| \le |f(s)| + \lambda|y + zW_s| + \lambda\|z\|$ et donc

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le \frac{1}{n}} |U_s^n|^2 + \int_0^{\frac{1}{n}} \|V_s^n\|^2\, ds\right] \le \frac{C}{n^2}\, \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le 1} |f(s)|^2 + |y + zW_s|^2 + \|z\|^2\right],$$

ce qui donne le résultat.

2. Comme U_0^n est déterministe, on a $n(Y_0^n - y) = n\mathbb{E}[U_0^n]$ et donc

$$n(Y_0^n - y) = n\,\mathbb{E}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} g(s, U_s^n, V_s^n)\, ds\right] = n\,\mathbb{E}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} f(s, U_s^n + y + zW_s, V_s^n + z)\, ds\right] \;;$$

par suite, il vient

$$n(Y_0^n - y) = n\,\mathbb{E}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} f(s,y,z)\, ds\right] + R_n,$$

avec

$$R_n = n\,\mathbb{E}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} \left\{f(s, U_s^n + y + zW_s, V_s^n + z) - f(s,y,z)\right\} ds\right].$$

D'après l'hypothèse de Lipschitz, on a, à l'aide de l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} |R_n| &\le n\lambda\,\mathbb{E}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} \left(|U_s^n + y + zW_s| + \|V_s^n\|\right) ds\right] \\ &\le \mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le \frac{1}{n}} |U_s^n + y + zW_s|\right] + \sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} \|V_s^n\|^2\, ds\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La continuité des trajectoires browniennes et l'estimation précédente montrent que R_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Pour finir, notons que, comme, $\mathbb{P}$–p.s., $s \longrightarrow f(s,y,z)$ est continue en 0, on a

$$\mathbb{P}\text{–p.s.,} \qquad n\int_0^{\frac{1}{n}} f(s,y,z)\,ds \longrightarrow f(0,y,z)\ ;$$

De plus, la majoration

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left|n\int_0^{\frac{1}{n}} f(s,y,z)\,ds\right| \le \sup_{0\le s\le 1}|f(s)| + \lambda|y| + \lambda\|z\|$$

permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et de conclure.

Exercice 2. 1. Soit $\xi = \exp\left\{\frac{W_1^2-|W_1|}{2}\right\}$. L'EDSr que l'on cherche à résoudre est linéaire ; la formule explicite donne

$$Y_t^k = \mathbb{E}^*\left(\min(\xi,k)\mid\mathcal{F}_t\right), \qquad d\mathbb{P}^* = e^{W_1-\frac{1}{2}}\,d\mathbb{P}.$$

En particulier, pour $t=0$, $Y_0^k = \mathbb{E}^*[\min(\xi,k)]$. Par convergence monotone, $\lim_{k\to+\infty} Y_0^k = \mathbb{E}^*[\xi]$. On a de plus

$$\mathbb{E}^*[\xi] = \mathbb{E}\left[e^{\frac{W_1^2-|W_1|}{2}}e^{W_1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x|}{2}}e^{x-\frac{1}{2}}\,dx = +\infty.$$

2. ξ n'est pas intégrable par rapport à $\mathbb{P}^*$ mais l'est par rapport à $\mathbb{P}$. Donc on ne peut pas résoudre une EDSr à croissance linéaire en z pour tout ξ intégrable.

Exercice 3. 1. Oublions l'exposant n pour alléger l'écriture. Puisque $Y_n = 0$, on a, pour tout réel a,

$$e^{2at}|Y_t|^2 + \int_t^n e^{2as}\|Z_s\|^2\,ds = \int_t^n e^{2as}\left(2Y_s\cdot f(s,Y_s,Z_s) - 2a|Y_s|^2\right)ds - 2\int_t^n e^{2as}Y_sZ_s\,dW_s\ ;$$

Or, les hypothèses sur f conduisent à l'inégalité,

$$2y\cdot f(s,y,z) \le 2\mu|y|^2 + 2\lambda|y|\,\|z\| + 2|y||f(s)| \le |y|^2\left(2\mu+\lambda^2/\varepsilon\right) + \varepsilon\|z\|^2 + 2|y||f(s)|.$$

Si donc $2a \ge 2\mu + \lambda^2/\varepsilon$, on a, pour tout $0\le t\le n$,

$$e^{2at}|Y_t|^2 + (1-\varepsilon)\int_t^n e^{2as}\|Z_s\|^2\,ds \le 2\int_0^n e^{2as}|Y_s|\,|f(s)|\,ds - 2\int_t^n e^{2as}Y_sZ_s\,dW_s.$$

Le calcul habituel donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,n]} e^{2as}|Y_s|^2 + \int_0^n e^{2as}\|Z_s\|^2\,ds\right] \le 2C(\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[\int_0^n e^{2as}|Y_s|\,|f(s)|\,ds\right]$$

et on conclut en notant que

$$2C(\varepsilon)\int_0^n e^{2as}|Y_s|\,|f(s)|\,ds \le \frac{1}{2}\sup_{s\in[0,n]} e^{2as}|Y_s|^2 + 2C(\varepsilon)^2\Big(\int_0^T e^{as}|f(s)|\,ds\Big)^2.$$

2. (a) Remarquons dans un premier temps que, pour tout $T\ge n$, (Y^n,Z^n) est solution de l'EDSr sur $[0,T]$,

$$Y_t^n = \int_t^T f(s,Y_s^n,Z_s^n)\mathbf{1}_{s\le n}\,ds - \int_t^T Z_s^n\,dW_s.$$

On déduit de cette remarque, notant $U = Y^{n+i} - Y^n$ et $V = Z^{n+i} - Z^n$, que (U, V) est solution de l'EDSr sur $[0, n+i]$,

$$U_t = \int_t^{n+i} F(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^{n+i} V_s\, dW_s,$$

où la fonction F est définie par

$$F(s, u, v) = f(s, u + Y_s^n, v + Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)\mathbf{1}_{s \le n}.$$

Comme $\rho > \mu + \lambda^2/2$, il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que $\rho > \mu + \lambda^2/(2\varepsilon)$. On obtient alors, via la question précédente

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup\nolimits_{s\in[0,n+i]} e^{2\rho s}|U_s|^2 + \int_0^{n+i} e^{2\rho s}\|V_s\|^2\, ds\right]\\ \le\quad C(\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^{n+i} e^{\rho s}|F(s,0,0)|\, ds\Big)^2\right] = C(\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[\Big(\int_n^{n+i} e^{\rho s}|f(s)|\, ds\Big)^2\right].\end{aligned}$$

Il suffit alors de noter que $U_t = 0$, $V_t = 0$ si $t \ge n+i$ pour obtenir

$$\left\|(Y^{n+i}, Z^{n+i}) - (Y^n, Z^n)\right\|_\rho^2 \le C(\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[\Big(\int_n^{+\infty} e^{\rho s}|f(s)|\, ds\Big)^2\right] \;;$$

ceci montre que la suite (Y^n, Z^n) est de Cauchy dans $\mathcal{B}^{2,\rho}$.

(b) Comme $\mathcal{B}^{2,\rho}$ est un espace de Banach, appelons (Y, Z) la limite de la suite (Y^n, Z^n). Fixons un réel $T > 0$. Pour $n \ge T$, on a

$$Y_0^n = Y_T^n + \int_0^T f(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds - \int_0^T Z_s^n\, dW_s.$$

La convergence dans $\mathcal{B}^{2,\rho}$ implique que

$$\mathbb{E}\left[\sup\nolimits_{s\in[0,T]} |Y_s^n - Y_s|^2 + \int_0^T \|Z_s^n - Z_s\|^2\, ds\right]$$

tend vers 0 si $n \to +\infty$. Ceci permet de passer facilement à la limite dans l'équation précédente puisque le générateur est Lipschitz.

(c) Passons à l'unicité. Supposons que (Y, Z) et (Y', Z') soient deux solutions dans $\mathcal{B}^{2,\rho}$. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $\rho > \mu + \lambda^2/(2\varepsilon)$. Fixons δ tel que $\rho > \delta > \mu + \lambda^2/(2\varepsilon)$. Un calcul similaire à celui de la première question donne, notant $U = Y - Y'$ et $V = Z - Z'$.

$$\left\|(U, V)\right\|_\delta^2 \le C(\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[e^{2\delta T}|U_T|^2\right] \le e^{2(\delta-\rho)T}\, C(\varepsilon)\,\mathbb{E}\left[\sup\nolimits_{s\ge 0} e^{2\rho s}|U_s|^2\right].$$

Passant à la limite lorsque $T \to +\infty$, on obtient $U = 0$ et $V = 0$.

3. (a) Posons $B_t = W_t - \int_0^t b(s)\, ds$. Comme b est borné, d'après le théorème de Girsanov, B est un un mouvement Brownien sur $[0, n]$ par rapport à la mesure $\mathbb{P}^*$ de densité par rapport à $\mathbb{P}$

$$\exp\left\{\int_0^n b(s)\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^n b(s)^2\, ds\right\}.$$

$\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ sont équivalentes sur $\mathcal{F}_n$.

De plus, l'EDSr dont Y^n est solution se réécrit

$$Y_t^n = \int_t^n \big(a(s)Y_s^n + f(s)\big)\,ds - \int_t^n Z_s^n\,dB_s.$$

Il vient alors – cf formule sur les EDSr linéaires –

$$Y_t^n = \mathbb{E}^*\left(\int_t^n e^{\int_t^s a(r)\,dr} f(s)\,ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right).$$

Comme $a(s) \le \mu$ et $|f(s)| \le K$ p.s. – $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{P}^*$ – c'est pareil sur $\mathcal{F}_n$ – on obtient

$$|Y_t^n| \le K\int_t^n e^{\mu(s-t)}\,ds = \frac{K}{|\mu|}\left(1 - e^{\mu(n-t)}\right) \le \frac{K}{|\mu|}.$$

(b) Avec ces notations on a

$$f(s, Y_s^n, Z_s^n) = a(s)Y_s^n + b(s)Z_s^n + f(s).$$

Il ne faut pas perdre de vue que a et b dépendent de Y^n et Z^n. Toutefois comme a et b sont bornés par λ et $a \le \mu$, on obtient le résultat via la question précédente.

(c) On fait à nouveau une linéarisation comme suit : notons $U = Y^{n+i} - Y^n$ et $V = Z^{n+i} - Z^n$. On a alors cf. 2. (a)

$$U_t = \int_t^{n+i} F(s, U_s, V_s)\,ds - \int_t^{n+i} V_s\,dW_s$$

où F est donnée par

$$F(s,U_s,V_s) = f(s, U_s + Y_s^n, V_s + Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n) + f(s)\mathbf{1}_{s>n} = a(s)U_s + b(s)V_s + f(s)\mathbf{1}_{s>n},$$

en posant

$$a(s) = \frac{f(s, U_s + Y_s^n, V_s + Z_s^n) - f(s, Y_s^n, V_s + Z_s^n)}{U_s}\mathbf{1}_{U_s \neq 0} + \mu\mathbf{1}_{U_s = 0}$$

et

$$b(s) = \frac{f(s, Y_s^n, V_s + Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)}{V_s}\mathbf{1}_{V_s \neq 0}.$$

Reprenant le calcul de la question 3. (a), on obtient

$$U_t = \mathbb{E}^*\left(\int_t^{n+i} e^{\int_t^s a(r)\,dr} f(s)\mathbf{1}_{s>n}\,ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right)$$

et pour $n \ge t$, comme $a \le \mu$ et $|f(s)| \le K$,

$$|U_t| \le K\int_n^{n+i} e^{\mu(s-t)}\,ds = \frac{K}{|\mu|}e^{\mu(n-t)}\left(1 - e^{\mu i}\right) \le \frac{K}{|\mu|}e^{\mu(n-t)}.$$

(d) Conservant les mêmes notations, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{2\mu s}|U_s|^2\,ds &= \int_0^n e^{2\mu s}|U_s|^2\,ds + \int_n^{n+i} e^{2\mu s}|Y_s^{n+i}|^2\,ds \\
&\le \frac{K^2}{\mu^2}\int_0^n e^{2\mu s}e^{2\mu(n-s)}\,ds + \frac{K^2}{\mu^2}\int_n^{n+i} e^{2\mu s}\,ds \\
&= \frac{K^2}{\mu^2}e^{2\mu n}\left(n + \frac{K}{2|\mu|}\left(1 - e^{\mu i}\right)\right) \;;
\end{aligned}$$

l'inégalité demeure valable si on prend l'espérance ce qui montre que Y^n est de Cauchy dans $\mathrm{M}^{2,\mu}$. Pour la suite Z^n, la formule d'Itô donne

$$|U(0)|^2 + \int_0^{n+i} e^{2\mu s}\|V_s\|^2\,ds = \int_0^{n+i} e^{2\mu s}\left(2U_sF(s,U_s,V_s) - 2\mu|U_s|^2\right)\,ds - 2\int_0^{n+i} e^{2\mu s}U_sV_s\,dW_s.$$

Or, on a

$$2U_sF(s,U_s,V_s) \leq 2\mu|U_s|^2 + 2\lambda^2|U_s|^2 + \frac{1}{2}\|V_s\|^2 + 2|U_s|\,|f(s)|\,\mathbf{1}_{s>n},$$

et par suite, comme U et $f(s)$ sont bornés, on a

$$\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left[\int_0^{n+i} e^{2\mu s}\|V_s\|^2\,ds\right] \leq 2\lambda^2\,\mathbb{E}\left[\int_0^{n+i} e^{2\mu s}|U_s|^2\,ds\right] + \frac{2K^2}{\mu^2}e^{2\mu n},$$

ce qui donne le résultat.

(e) Le passage à la limite est immédiat car on a, pour tout $T > 0$,

$$\sup_{s\in[0,T]}|Y_t - Y_t^n| \longrightarrow 0$$

presque sûrement et dans tous les espaces L^p avec p réel puisque « les Y » sont bornés. De plus,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_s - Z_s^n\|^2\,ds\right] \longrightarrow 0.$$

(f) Étudions à présent l'unicité des solutions. Posons $U = Y - Y'$ et $V = Z - Z'$. Fixons $t \geq 0$. On a, pour tout $n \geq t$,

$$U_t = U_n + \int_t^n \big(a(s)U_s + b(s)V_s\big)\,ds - \int_t^n V_s\,dW_s$$

où les processus a et b sont définis par

$$a(s) = \frac{f(s,Y_s,Z_s) - f(s,Y'_s,Z_s)}{U_s}\mathbf{1}_{U_s\neq 0} + \mu\mathbf{1}_{U_s=0},$$

$$b(s) = \frac{f(s,Y'_s,Z_s) - f(s,Y'_s,Z'_s)}{V_s}\mathbf{1}_{V_s\neq 0}.$$

On a alors en utilisant la transformation de Girsanov sur $[0,n]$, comme $a \leq \mu$ et U est borné disons par M,

$$|U_t| \leq \mathbb{E}^*\left(e^{\int_t^n a(s)\,ds}|U_n| \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right) \leq Me^{\mu(n-t)}.$$

Passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $U_t = 0$.

À présent la formule d'Itô appliquée à $|U_t|^2$ donne, puisque $U \equiv 0$, pour tout $T > 0$,

$$\int_0^T \|V_s\|^2\,ds = 0,$$

ce qui conclut quand à l'unicité des solutions.