UFR Mathématiques — DEA de mathématiques

Université Rennes I — Année 2003/2004

Filière II : EDSr et applications.

Examen 1^{re} session : durée trois heures.

Documents autorisés : polycopié et notes personnelles de cours.

Mercredi 31 mars 2004.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet sur lequel est défini un mouvement brownien d-dimensionnel $B = \{B_t\}_{t\geq 0}$; $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ désigne la filtration augmentée de B. T est un réel strictement positif.

Exercice 1. Soient $F : [0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une application mesurable et $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$. On cherche à résoudre l'EDSr

$$Y_t = \xi + \int_t^T F(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_t^T Z_s\, dB_s, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

lorsque F est seulement localement Lipschitzienne. Nous ferons l'hypothèse suivante : il existe une suite croissante de réels positifs $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ et $\alpha \in]0,1[$ tels que

$$\sup_{n\geq 1} \lambda_n = +\infty, \qquad \sup_{n\geq 1} n^{\alpha-1} e^{(\lambda_n^2+\lambda_n)T} < +\infty,$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$|y| \leq n,\ |u| \leq n,\ |z| \leq n,\ |v| \leq n \quad\Longrightarrow\quad |F(t,y,z) - F(t,u,v)| \leq \lambda_n\left(|y-u| + |z-v|\right).$$

On suppose d'autre part qu'il existe une constante $\gamma \geq 0$ telle que,

$$\forall (t,y,z) \in [0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, \qquad |F(t,y,z)| \leq \gamma\left(1 + |y|^\alpha + |z|^\alpha\right).$$

1. Pour tout $n \geq 1$, on note q_n l'application $q_n(x) = nx/\max(|x|, n)$ et F_n l'application définie par $F_n(t,y,z) = F(t, q_n(y), q_n(z))$.

(a) Montrer que l'EDSr de générateur F_n et de condition terminale ξ possède une unique solution notée (Y^n, Z^n) telle que $Z^n \in \mathrm{M}^2$.

(b) Montrer également que

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^n|^2 + \int_0^T |Z_t^n|^2\, dt\right] < +\infty.$$

2. Soit (Y,Z) une solution de l'EDSr (1) telle que $Z \in \mathrm{M}^2$.

(a) Justifier brièvement l'appartenance de (Y,Z) à $\mathcal{B}^2$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, établir l'inégalité

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t - Y_t^n|^2 + \int_0^T |Z_t - Z_t^n|^2 \, dt\right]$$
$$\leq \; C_u \, \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{(\lambda_n+\lambda_n^2)t} \left|F(t,Y_t,Z_t) - F_n(t,Y_t,Z_t)\right| \, dt\right)^2\right].$$

(c) Montrer que (Y^n, Z^n) converge dans $\mathcal{B}^2$ vers (Y, Z).

3. En déduire que l'EDSr (1) possède au plus une solution telle que $Z \in \mathrm{M}^2$.

4. (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|Y_t^{n+p} - Y_t^n\right|^2 + \int_0^T \left|Z_t^{n+p} - Z_t^n\right|^2 \, dt\right]$$
$$\leq \; C_u \, \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{(\lambda_n+\lambda_n^2)t} \left|F_{n+p}(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p}) - F_n(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p})\right| \, dt\right)^2\right].$$

(b) En déduire l'existence d'une constante C indépendante de n et p telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|Y_t^{n+p} - Y_t^n\right|^2 + \int_0^T \left|Z_t^{n+p} - Z_t^n\right|^2 \, dt\right] \leq C \, e^{2(\lambda_n+\lambda_n^2)T} \, n^{2(\alpha-1)}.$$

(c) En déduire que, lorsque $\lim_{n\to+\infty} e^{(\lambda_n+\lambda_n^2)T} \, n^{\alpha-1} = 0$, l'EDSr (1) possède une unique solution telle que $Z \in \mathrm{M}^2$.

5. On veut à présent établir le même résultat lorsque $\sup_{n\geq 1} e^{(\lambda_n+\lambda_n^2)T} \, n^{\alpha-1} < +\infty$.

(a) Montrer qu'il existe une constante K telle que, pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|Y_t^{n+p} - Y_t^n\right|^2 + \int_0^T \left|Z_t^{n+p} - Z_t^n\right|^2 \, dt\right]$$
$$\leq \; \frac{K}{2(\lambda_n^2+\lambda_n)} \, \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{2(\lambda_n+\lambda_n^2)t} \left|F_{n+p}(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p}) - F_n(t,Y_t^n,Z_t^n)\right|^2 \mathbf{1}_{A(t)} \, dt\right],$$

où $A(t) = \left\{\max\left(|Y_t^n|, |Z_t^n|, |Y_t^{n+p}|, |Z_t^{n+p}|\right) \geq n\right\}$.

(b) En déduire que la suite (Y^n, Z^n) est de Cauchy dans $\mathcal{B}^2$.

(c) Conclure.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, on se place dans le cas scalaire $k = 1$.

1. Soient (Y, Z) et (Y', Z') deux éléments de $\mathcal{B}^2$, solutions respectives des EDSr associées à (ξ, F) et (ξ', F'), où ξ et ξ' appartiennent à $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$.

On suppose qu'il existe deux constantes positives μ et λ telles que, pour tout $z \in \mathbb{R}^{1\times d}$,

$$u \leq y \quad \Longrightarrow \quad F(t,y,z) - F(t,u,z) \leq \mu\,(y-u),$$

et, pour tout $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$,

$$\forall (z,v) \in \mathbb{R}^{1\times d} \times \mathbb{R}^{1\times d}, \qquad |F(t,y,z) - F(t,y,v)| \leq \lambda\,|z-v|.$$

On suppose aussi que $\xi \geq \xi'$ et que $F(t, Y'_t, Z'_t) \geq F'(t, Y'_t, Z'_t)$.

Pour $n \geq 1$, on note ψ_n la fonction réelle définie par $\psi_n(x) = 0$ si $x < 0$, et

$$\psi_n(x) = n\frac{x^3}{3}, \quad \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \qquad \psi_n(x) = x^2 - \frac{x}{n} + \frac{1}{3n^2}, \quad \text{si } x \geq \frac{1}{n}.$$

(a) Quelles sont les limites de $\psi_n(x)$, $\psi'_n(x)$ et $\psi''_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$?

(b) En utilisant la formule d'Itô pour calculer $\mathbb{E}\left[\psi_n(Y'_t - Y_t)\right]$, montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, $Y_t \geq Y'_t$ presque sûrement.

2. Soient $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$ une variable positive et $\alpha > -1$. On considère l'EDSr

$$Y_t = \xi - \int_t^T Y_s^{1+\alpha}\, ds - \int_t^T Z_s\, dB_s, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2}$$

(a) Montrer qu'elle possède une solution $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ et que cette solution est unique dans la classe des processus $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ tel que Y soit positif.

Indication : Pensez à $y \longmapsto -(y^+)^{1+\alpha}$.

(b) Résoudre explicitement cette EDSr dans le cas où ξ est une constante positive.

3. On suppose que $\alpha > 0$.

(a) Montrer que, si ξ est majorée par $n \in \mathbb{N}^*$, presque sûrement,

$$\forall t \in [0, T], \qquad Y_t \leq \left(n^{-\alpha} + \alpha\,(T - t)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

(b) En déduire que, pour toute variable aléatoire $\xi \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$ positive, presque sûrement

$$\forall t \in [0, T[, \qquad Y_t \leq \left(\alpha\,(T - t)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Indication : pensez à $\xi \wedge n$.

4. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et bornée. Rappelons que, pour tout $T > 0$, il existe une unique fonction $u : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et bornée, solution de viscosité de l'EDP

$$\dot{u}(t, x) + \frac{1}{2}u''(t, x) - u^{1+\alpha}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \qquad \text{telle que} \quad u(T, \cdot) = g.$$

(a) Soit $T > 0$; exprimer u en termes d'EDSr. En déduire que $\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

(b) Montrer qu'il existe une unique fonction $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive et bornée solution de viscosité de l'EDP

$$\dot{v}(t, x) = \frac{1}{2}v''(t, x) - v^{1+\alpha}(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \text{telle que} \quad v(0, \cdot) = g.$$

Indication : pensez à $v(T - t, x)$.

(c) Exprimer v en termes d'EDSr.

(d) Montrer que, pour $\alpha \geq 0$, $\lim_{t \to +\infty} v(t, x) = 0$.

(e) On suppose que $\alpha \in]-1, 0[$. Montrer qu'il existe un réel $\tau \geq 0$ tel que $v(t, x) = 0$ pour $t \geq \tau$ et $x \in \mathbb{R}$.

(f) Montrer que ce dernier résultat n'est pas nécessairement vrai pour $\alpha \geq 0$.

UFR Mathématiques
Université Rennes I

DEA de Mathématiques
Année 2003/2004

EDSr et Applications : Correction rapide de l'examen.

Exercice 1. Notons $r_n = \lambda_n + \lambda_n^2$.

1. (a) Pour tout $n \geq 1$, l'application $x \longmapsto q_n(x)$ est 1-Lipschitzienne. Par conséquent, F_n est λ_n-Lipschitzienne. D'autre part, comme $|x|^\alpha \leq 1 + |x|$, F_n est à croissance linéaire : en fait, $|F_n(t,y,z)| \leq \gamma\,(3 + |y| + |z|)$. Il suffit donc d'appliquer le résultat de Pardoux–Peng.

(b) Puisque $|F_n(t,y,z)| \leq \gamma\,(3 + |y| + |z|)$, on a

$$y \cdot F_n(t,y,z) \leq 3\gamma\,|y| + \gamma\,|y|^2 + \gamma\,|y|\,|z|,$$

et les estimations à priori donnent – pour la norme usuelle dans $\mathcal{B}^2$ –

$$\|(Y^n, Z^n)\|^2 \leq C_u\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{(\gamma+\gamma^2)s} 3\gamma\,ds\right)^2\right] \leq 9\gamma^2 C_u T e^{2(\gamma+\gamma^2)T}.$$

2. (a) Comme $|F(t,y,z)| \leq \gamma\,(3 + |y| + |z|)$, si (Y,Z) est une solution de (1), $Z \in \mathrm{M}^2$ implique que $(Y,Z) \in \mathcal{B}^2$.

(b) Le couple $U_t = Y_t^n - Y_t$, $V_t = Z_t^n - Z_t$ est solution dans $\mathcal{B}^2$ de l'EDSr de condition terminale nulle et de générateur

$$G(t,u,v) = F_n(t, u + Y_t, v + Z_t) - F(t, Y_t, Z_t),$$

qui est λ_n–Lipschitzien. Les estimations à priori donnent

$$\|(U,V)\|^2 \leq C_u\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{(\lambda_n+\lambda_n^2)s}|G(s,0,0)|\,ds\right)^2\right] \;;$$

or $G(t,0,0) = F_n(t,Y_t,Z_t) - F(t,Y_t,Z_t)$.

(c) Notons A_n l'ensemble $A_n = \{(t,\omega) : \max(|Y_t|,|Z_t|) \geq n\}$ et, pour $t \in [0,T]$, désignons par $A_n(t)$ la section. Par construction, $F(t,Y_t,Z_t) = F_n(t,Y_t,Z_t)$ sur $A_n(t)^c$. Vu la croissance de F_n et F, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{(\lambda_n+\lambda_n^2)t}|G(t,0,0)|\,dt\right)^2\right] \leq 4T\gamma^2\,e^{2r_nT}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T (1 + |Y_t|^\alpha + |Z_t|^\alpha)^2\;\mathbf{1}_{A_n(t)}\,dt\right],$$

et l'inégalité de Hölder donne, si $m_n = m \otimes \mathbb{P}(A_n)$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (1 + |Y_t|^\alpha + |Z_t|^\alpha)^2\;\mathbf{1}_{A_n(t)}\,dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^T (1 + |Y_t|^\alpha + |Z_t|^\alpha)^{2/\alpha}\;\mathbf{1}_{A_n(t)}\,dt\right]^\alpha m_n^{1-\alpha}.$$

D'autre part, l'inégalité de Markov conduit à la majoration

$$m_n \leq n^{-2}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T (1 + |Y_t|^\alpha + |Z_t|^\alpha)^{2/\alpha}\;\mathbf{1}_{A_n(t)}dt\right],$$

d'où l'on déduit que $m_n \to 0$ et que

$$\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^T e^{(\lambda_n+\lambda_n^2)t}|G(t,0,0)|\,dt\Big)^2\right] \leq 4T\gamma^2\,\frac{e^{2r_nT}}{n^{2(1-\alpha)}}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T (1+|Y_t|^\alpha+|Z_t|^\alpha)^{2/\alpha}\,\mathbf{1}_{A_n(t)}dt\right].$$

Or, par hypothèse, $\sup_{n\geq 1} e^{2r_nT}n^{2(\alpha-1)} < +\infty$ et, comme $(1+|Y_t|^\alpha+|Z_t|^\alpha)^{2/\alpha}$ est $m\otimes\mathbb{P}$ intégrable sur $]0,T[\times\Omega$ et $m\otimes\mathbb{P}(A_n) \longrightarrow 0$ on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (1+|Y_t|^\alpha+|Z_t|^\alpha)^{2/\alpha}\,\mathbf{1}_{A_n(t)}dt\right] \longrightarrow 0.$$

3. Si l'EDSr (1) possède deux solutions (Y,Z) et (Y',Z') avec Z et Z' éléments de M^2, alors elles appartiennent toutes les deux à $\mathcal{B}^2$ et d'après la question précédente sont toutes les deux limite dans le Banach $\mathcal{B}^2$de la suite (Y^n,Z^n) : elles sont donc égales.

4. (a) C'est le calcul de la question 2. (b) en remplaçant $F(t,Y_t,Z_t)$ par $F_{n+p}(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p})$.

(b) Comme en 2. (c), si on pose $A_{n,p}=\{(t,\omega) : \max(|Y^{n+p}|,|Z^{n+p}|)\geq n\}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Y_t^{n+p}-Y_t^n\right|^2+\int_0^T\left|Z_t^{n+p}-Z_t^n\right|^2\,dt\right]\\ &\quad\leq\ C(T,\gamma)\,\frac{e^{2r_nT}}{n^{2(1-\alpha)}}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T\Big(1+|Y_t^{n+p}|^\alpha+|Z_t^{n+p}|^\alpha\Big)^{2/\alpha}\,\mathbf{1}_{A_{n,p}(t)}\,dt\right],\end{aligned}$$

et la suite (Y^n,Z^n) est bornée dans $\mathcal{B}^2$.

(c) Si $e^{2r_nT}\,n^{2(\alpha-1)} \longrightarrow 0$, la suite (Y^n,Z^n) est de Cauchy donc convergente dans $\mathcal{B}^2$. On vérifie très facilement que (Y,Z) est une solution de l'EDSr (1) ; l'unicité a déjà été étudiée.

5. (a) Commençons par remarquer que notant, $U=Y^{n+p}-Y^n$, $V=Z^{n+p}-Z^n$, on a

$$\begin{aligned}&2U_t\cdot\left[F_{n+p}\left(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p}\right)-F_n\left(t,Y_t^n,Z_t^n\right)\right]\,\mathbf{1}_{A^c(t)}\\ &\qquad\leq\ 2\lambda_n\,|U_t|^2\,\mathbf{1}_{A^c(t)}+2\lambda_n\,|U_t|\,|V_t|\,\mathbf{1}_{A^c(t)}\ \leq\ 2r_n\,|U_t|^2\,\mathbf{1}_{A^c(t)}+\frac{1}{2}\,|V_t|^2,\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}&2U_t\cdot\left[F_{n+p}\left(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p}\right)-F_n\left(t,Y_t^n,Z_t^n\right)\right]\,\mathbf{1}_{A(t)}\\ &\qquad\leq\ 2r_n\,|U_t|^2\,\mathbf{1}_{A(t)}+\frac{1}{2r_n}\,\left|F_{n+p}\left(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p}\right)-F_n\left(t,Y_t^n,Z_t^n\right)\right|^2\,\mathbf{1}_{A(t)}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}&2U_t\cdot\left[F_{n+p}\left(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p}\right)-F_n\left(t,Y_t^n,Z_t^n\right)\right]\\ &\qquad\leq\ 2r_n\,|U_t|^2+\frac{1}{2}\,|V_t|^2+\frac{1}{2r_n}\,\left|F_{n+p}\left(t,Y_t^{n+p},Z_t^{n+p}\right)-F_n\left(t,Y_t^n,Z_t^n\right)\right|^2\,\mathbf{1}_{A(t)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient en appliquant la formule d'Itô à $e^{2r_nt}|U_t|^2$, pour tout $t\geq 0$,

$$\begin{aligned}&e^{2r_nt}|U_t|^2+\frac{1}{2}\int_t^T e^{2r_ns}|V_s|^2\,ds\\ &\quad\leq\ \frac{1}{2r_n}\int_0^T e^{2r_ns}\left|F_{n+p}(s,Y_s^{n+p},Z_s^{n+p})-F_n(s,Y_s^n,Z_s^n)\right|^2\mathbf{1}_{A(s)}\,ds-2\int_t^T e^{2r_ns}\,U_s\cdot V_s\,dB_s,\end{aligned}$$

inégalité dont la majoration découle via les arguments standarts.

(b) D'après la croissance de F_{n+p} et F_n on a – cf. 2. (c) –

$$\begin{aligned}\|(U,V)\|^2 &\leq C(T,\gamma)\frac{e^{2r_nT}}{2r_n\, n^{2(1-\alpha)}}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(2+|Y_t^{n+p}|^\alpha+|Z_t^{n+p}|^\alpha+|Y_t^n|^\alpha+|Z_t^n|^\alpha\right)^{2/\alpha}\mathbf{1}_{A(t)}\,dt\right]\\ &\leq \frac{C}{r_n},\end{aligned}$$

où la constante C est indépendante de n et p puisque la suite (Y^n,Z^n) est bornée dans $\mathcal{B}^2$ et $\sup_{n\geq 1} n^{\alpha-1}\,e^{r_nT}<+\infty$. Comme $r_n\to+\infty$, la suite (Y^n,Z^n) est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$.

(c) On vérifie que la limite de cette suite est solution de l'EDSr (1) qui possède donc une unique solution.

Exercice 2. 1. (a) Pour tout réel x, $\psi_n(x)$, $\psi_n'(x)$ et $\psi_n''(x)$ convergent en croissant respectivement vers $(x^+)^2$, $2x\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $2\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

(b) La formule d'Itô s'écrit, notant $U_t=Y_t'-Y_t$ et $V_t=Z_t'-Z_t$,

$$\begin{aligned}&\psi_n(U_t)+\frac{1}{2}\int_t^T \psi_n''(U_s)|V_s|^2\,ds\\ &= \psi_n(\xi'-\xi)+2\int_t^T \psi_n'(U_s)\left(F'\left(s,Y_s',Z_s'\right)-F(s,Y_s,Z_s)\right)ds-2\int_t^T\psi_n'(U_s)V_s\,dB_s.\end{aligned}$$

Comme ψ_n et ψ_n' sont positives et nulles sur $\mathbb{R}_-$, on a, vu les hypothèses,

$$\psi_n(U_t)+\frac{1}{2}\int_t^T\psi_n''(U_s)|V_s|^2\,ds\leq 2\int_t^T\psi_n'(U_s)\left(\mu U_s^++\lambda|V_s|\right)ds-2\int_t^T\psi_n'(U_s)V_s\,dB_s.$$

D'autre part, ψ_n' étant à croissance linéaire, l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle et par conséquent

$$\mathbb{E}\left[\psi_n(U_t)+\frac{1}{2}\int_t^T\psi_n''(U_s)|V_s|^2\,ds\leq\right]\leq 2\,\mathbb{E}\left[\int_t^T\psi_n'(U_s)\left(\mu U_s^++\lambda|V_s|\right)ds\right]\;;$$

par convergence montone, il vient

$$\mathbb{E}\left[(U_t^+)^2+\int_t^T|V_s|^2\,ds\right]\leq 2\int_t^T\mathbb{E}\left[\mu(U_s^+)^2+\lambda U_s^+|V_s|\right]ds$$

d'où l'on déduit que

$$\mathbb{E}\left[(U_t^+)^2\right]\leq(2\mu+\lambda^2)\int_t^T\mathbb{E}\left[(U_s^+)^2\right]ds\;;$$

le lemme de Gronwall implique que pour tout $t\in[0,T]$, $U_t^+=0$ soit $Y_t'\leq Y_t$.

2. (a) Pour tout $\alpha>-1$, la fonction $F(y):=-(y^+)^{1+\alpha}$ est continue, décroissante et nulle en 0. D'après le résultat sur les EDSr monotones, l'EDSR (ξ,F) possède une unique solution dans $\mathcal{B}^2$. Comme $\xi\geq 0$ et $F(0)\geq 0$, le théorème de comparaison – question précédente – implique que $Y_t\geq 0$. Le résultat s'en suit.

(b) Si ξ est constante égale à c, on est ramené à une équation différentielle ordinaire. La solution est pour $\alpha=0$, $Y_t=c\,e^{-(T-t)}$ et pour $\alpha\neq 0$,

$$Y_t=\left[\left(c^{-\alpha}+\alpha(T-t)\right)^+\right]^{-1/\alpha}.$$

3. (a) Si $\xi \leq n$, on obtient d'après le théorème de comparaison,

$$Y_t \leq \left(n^{-\alpha} + \alpha(T-t)\right)^{-1/\alpha} \leq (\alpha(T-t))^{-1/\alpha}.$$

(b) D'après le théorème de comparaison, la suite $Y_t^{\xi\wedge n}$ est croissante. D'autre part, les estimations à priori impliquent que $Y^{\xi\wedge n}$ converge vers Y dans $\mathcal{S}^2$. $Y_t^{\xi\wedge n}$ converge donc en croissant vers Y_t. Donc

$$Y_t = \sup_{n\geq 1} Y_t^{\xi\wedge n} \leq \sup_{n\geq 1} \left(n^{-\alpha} + \alpha(T-t)\right)^{-1/\alpha} \leq (\alpha(T-t))^{-1/\alpha}.$$

4. (a) D'après la formule de Feynman-Kac non-linéaire, nous avons $u(t,x) = Y_t$ avec (Y,Z) solution de l'EDSr

$$Y_r = g(x + B_T - B_t) - \int_r^T (Y_s)^{1+\alpha}\, ds - \int_r^T Z_s\, dB_s, \quad 0 \leq r \leq T.$$

En particulier, prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_r$, on a

$$Y_r = \mathbb{E}\left(g(x+B_T-B_t) - \int_r^T (Y_s)^{1+\alpha}\, ds \,\middle|\, \mathcal{F}_r\right) \leq \mathbb{E}\left(g(x+B_T-B_t) \,\middle|\, \mathcal{F}_r\right) \leq \|g\|_\infty \;;$$

pour $r = t$ ceci donne la majoration requise.

(b) Si on a deux solutions v^1 et v^2, alors pour tout $T > 0$, $u^1(t,x) = v^1(T-t,x)$ et $u^2(t,x) = v^2(T-t,x)$ sont deux solutions de l'EDP avec condition en T égale a g. Comme pour tout $T > 0$ il y a unicité de cette EDP, on obtient pout $t = T/2$, $v^1(T/2,x) = v^2(T/2,x)$.

Passons à l'existence. Notons $u_T(t,x)$ la solution de l'EDP avec condition $u(T,x) = g(x)$. Remarquons que $u_{T+h}(h+t,x) = u_T(t,x)$ pour tous $0 \leq t \leq T$, $h \geq 0$ puisque $(t,x) \longmapsto u_{T+h}(h+t,x)$ est aussi solution de l'EDP satisfaite par u_T. Il suffit alors de définir pour $t \geq 0$, $v(t,x) = u_t(0,x)$. D'après le raisonnement précédent, pour tout $T \geq t$, $v(t,x) = u_T(T-t,x)$ ce qui montre que v est solution de l'EDP.

(c) Puisque $v(t,x) = u_t(0,x)$ on a $v(t,x) = Y_0$ avec

$$Y_r = g(x + B_t) - \int_r^t (Y_s)^{1+\alpha}\, ds - \int_r^t Z_s\, dB_s, \qquad 0 \leq r \leq t.$$

(d) Pour $\alpha = 0$, on a $v(t,x) \leq \|g\|_\infty\, e^{-t}$ et pour $\alpha > 0$,

$$v(t,x) \leq \left(\|g\|_\infty^{-\alpha} + \alpha t\right)^{-1/\alpha}.$$

(e) Lorsque $-1 < \alpha < 0$,

$$v(t,x) \leq \left[\left(\|g\|_\infty^{-\alpha} + \alpha t\right)^+\right]^{-1/\alpha} \quad ;$$

ce majorant est nul dès que $t \geq -\|g\|_\infty^{-\alpha}/\alpha$.

(f) Si on suppose la fonction g minorée par une constante strictement positive disons c, le théorème de comparaison montre que

$$v(t,x) \geq (c^{-\alpha} + \alpha t)^{-1/\alpha}$$

si $\alpha > 0$ et $v(t,x) \geq c\, e^{-t}$ lorsque $\alpha = 0$.