Chapitre 4

Équations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord le théorème d'existence et d'unicité sur les équations différentielles stochastiques – EDS en abrégé dans la suite du cours – puis nous nous intéresserons au flot stochastique engendré par une EDS. Nous finirons par la propriété de Markov.

1. Le résultat classique d'Itô

1.1. Définitions et notations. On se place toujours sur un espace de probabilité complet, disons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on se donne W un MB d–dimensionnel sur cet espace. On considère également une variable aléatoire Z, de carré intégrable, et indépendante du MB W. On considère la filtration définie, pour tout t positif, par $\mathcal{F}_t = \sigma\big\{\sigma\{Z,\ W_s; s \leq t\} \cup \mathcal{N}\big\}$.

Soit T un réel strictement positif. On considère deux fonctions $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad \text{avec}, \quad X_0 = Z;$$

comme nous allons le voir par la suite cette équation est à interpréter au sens d'une équation intégrale, à savoir :

$$X_t = Z + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dW_r, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1}$$

Le coefficient b s'appelle la dérive tandis que la matrice $\sigma\sigma^t$ s'appelle la matrice de diffusion.

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par une solution de l'EDS (1).

Définition 1. Une solution (forte) de l'EDS (1), X, est un processus continu tel que :

1. X est progressivement mesurable ;
2. $\mathbb{P}$–p.s. $\displaystyle\int_0^T \{|b(r, X_r)| + \|\sigma(r, X_r)\|^2\}dr < \infty$, où $\|\sigma\| = \operatorname{trace}(\sigma\sigma^*)$;
3. $\mathbb{P}$–p.s., on a : $X_t = Z + \displaystyle\int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dW_r, \quad 0 \leq t \leq T.$

On notera $\mathcal{S}^2$ l'espace de Banach constitué des processus X, progressivement mesurables, tels que $\mathbb{E}\big[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\big] < \infty$ muni de la norme $\|X\| := \mathbb{E}\big[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\big]^{1/2}$, et $\mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$ le sous espace de $\mathcal{S}^2$ formé des processus continus. Notez que deux processus indistinguables sont identifiés et par abus d'écriture l'espace quotient est noté de la même façon.

Nous finissons ce paragraphe en rappelant un résultat élémentaire assez utile pour la suite.

Lemme 2. Lemme de Gronwall. *Soit $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds, \qquad a \in \mathbb{R},\ b \geq 0.$$

Alors, pour tout t, $g(t) \leq a\exp(bt)$.

Remarque. Pour simplifier les calculs déjà nombreux, les démonstrations seront effectuées dans le cas $n = d = 1$.

1.2. Existence et unicité.

Nous allons établir le résultat suivant, dû à Itô :

Théorème 3. *Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

1. *condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K|x-y|;$$

2. *croissance linéaire : $|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|)$;*
3. *$\mathbb{E}[|Z|^2] < \infty$.*

Alors l'EDS (1) possède une unique solution (à l'indistinguabilité près). Cette solution appartient à $\mathcal{S}^2$ et donc à $\mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$.

Démonstration. La preuve consiste à utiliser la méthode itérative de Picard comme dans le cas déterministe. Une démonstration s'appuyant sur un argument de point fixe est également possible.

Pour $X \in \mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$, posons, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Phi(X)_t = Z + \int_0^t b(r, X_r)dr + \int_0^t \sigma(r, X_r)dW_r.$$

Le processus $\Phi(X)$ est bien défini et est continu si $X \in \mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$.

Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$, comme $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, on a, pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$\left|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t\right|^2 \leq 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \big(b(r,X_r) - b(r,Y_r)\big)dr\right|^2 + 2\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \big(\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r)\big)dW_r\right|^2.$$

Utilisant les propriétés de l'intégrale stochastique, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t\right|^2\Big] &\leq 2\mathbb{E}\left[\Big(\int_0^u \left|b(r,X_r) - b(r,Y_r)\right|dr\Big)^2\right] \\ &\quad + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u \left\|\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r)\right\|^2 dr\right].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t\right|^2\Big] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u \left|b(r,X_r) - b(r,Y_r)\right|^2 dr\right] \\ &\quad + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u \left\|\sigma(r,X_r) - \sigma(r,Y_r)\right\|^2 dr\right].\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipschitz en espace, on obtient, pour tout $u \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t\right|^2\Big] \leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\Big[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq r}|X_t - Y_t|^2 dr\Big]. \tag{2}$$

De plus, notant 0 le processus nul, on a, comme $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$,

$$\left|\Phi(0)_t\right|^2 \le 3Z^2 + 3 \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b(r,0)dr\right|^2 + 3\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t \sigma(r,0)dW_r\right|^2,$$

d'où l'on tire en utilisant l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de b et σ,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\left|\Phi(0)_t\right|^2\Big] \le 3\Big(\mathbb{E}\big[Z^2\big] + K^2T^2 + 4K^2T\Big). \tag{3}$$

Les estimations (2) et (3) montrent alors que le processus $\Phi(X)$ appartient à $\mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$ dès que X appartient à $\mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$.

On définit alors par récurrence une suite de processus de $\mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$ en posant

$$X_0 = 0, \quad \text{et,} \quad X^{n+1} = \Phi(X^n), \text{ pour } n \ge 0.$$

On obtient très facilement à l'aide de la formule (2), pour tout $n \ge 0$, notant C à la place de $2K^2(T+4)$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\Big] \le \frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^1\right|^2\Big],$$

soit encore, notant D le majorant de l'inégalité (3),

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\Big] \le D\frac{C^nT^n}{n!}.$$

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\sum_{n\ge 0}\Big\|\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\Big\|_{\mathrm{L}^1} \le \sum_{n\ge 0}\Big\|\sup_{0\le t\le T}\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|\Big\|_{\mathrm{L}^2} \le \sqrt{D}\sum_{n\ge 0}\frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Ainsi, la série $\sum_n \sup_t \left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P}$–p.s. et donc, $\mathbb{P}$–p.s., X^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X continu. De plus $X \in \mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$ puisque la convergence a lieu dans $\mathcal{S}^2$ – voir l'inégalité précédente. On vérifie très facilement que X est solution de l'EDS (1) en passant à la limite dans la définition $X^{n+1} = \Phi(X^n)$.

Si X et Y sont deux solutions de l'EDS (1) dans $\mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$ alors $X = \Phi(X)$ et $Y = \Phi(Y)$. L'inégalité (2) donne alors, pour tout $u \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le u}\left|X_t - Y_t\right|^2\Big] \le 2K^2(T+4)\int_0^u \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le r}|X_t-Y_t|^2\Big]dr,$$

et le lemme de Gronwall montre que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\left|X_t - Y_t\right|^2\Big] = 0,$$

ce qui prouve que X et Y sont indistinguables.

Pour montrer l'unicité des solutions de (1) au sens de la définition 2, nous devons montrer que toute solution appartient à $\mathcal{S}^2_{\mathrm{c}}$ c'est à dire, comme toute solution est continue par définition, appartient à $\mathcal{S}^2$.

Pour cela, considérons le temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t \in [0,T],\ |X_t| > n\}$ avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$. Si $u \in [0,t]$, on a

$$\left|X_{u\wedge\tau_n}\right|^2 \le 3\Bigg(|Z|^2 + \sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n} b(r,X_r)dr\right|^2 + \sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n}\sigma(r,X_r)dW_r\right|^2\Bigg).$$

Il vient alors,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n}\big|X_u\big|^2\Big]\le 3\bigg(\mathbb{E}\big[|Z|^2\big]+\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n}\big|b(r,X_r)\big|dr\Big)^2\Big]+4\mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau_n}\big\|\sigma(r,X_r)\big\|^2dr\Big]\bigg),$$

et utilisant la croissance linéaire de b et σ, on obtient :

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n}\big|X_u\big|^2\Big]\le 3\bigg(\mathbb{E}\big[|Z|^2\big]+2K^2T^2+8K^2T+(2K^2T+8K^2)\int_0^t\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le u\le r\wedge\tau_n}\big|X_u\big|^2\Big]\bigg).$$

On obtient, en appliquant le lemme de Gronwall, à la fonction $t\longmapsto\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le u\le t\wedge\tau_n}\big|X_u\big|^2\Big]$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le u\le T\wedge\tau_n}\big|X_u\big|^2\Big]\le 3\Big(\mathbb{E}\big[|Z|^2\big]+2K^2T^2+8K^2T\Big)\exp\{3(2K^2T+8K^2)T\},$$

et le lemme de Fatou donne

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\le u\le T}\big|X_u\big|^2\Big]<3\Big(\mathbb{E}\big[|Z|^2\big]+2K^2T^2+8K^2T\Big)\exp\{3(2K^2T+8K^2)T\}.$$

Ceci implique l'unicité des solutions de l'EDS (1).

Cette remarque termine la preuve. □

1.3. Exemples. Donnons deux exemples classiques d'EDS. Le premier est emprunté au monde de la finance. Le prix d'une action est généralement modélisé par l'EDS :

$$dS_t=S_t\big(\mu dt+\sigma dW_t\big),\qquad S_0 \text{ donné};$$

le paramètre σ s'appelle la volatilité et est très important. On montre facilement à l'aide de la formule d'Itô que

$$S_t=S_0\exp\big\{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t\big\}.$$

Considérons à présent l'équation de Langevin :

$$dX_t=-cX_tdt+\sigma dW_t,\qquad X_0=x.$$

L'unique solution X de cette EDS s'appelle le processus d'Ornstein–Ulhenbeck. Posons $Y_t=X_te^{ct}$. La formule d'intégration par parties donne

$$dY_t=e^{ct}dX_t+ce^{ct}X_tdt=e^{ct}\sigma dW_t.$$

On a alors $X_t=e^{-ct}x+\displaystyle\int_0^t e^{c(s-t)}\sigma dW_s$. On peut montrer que le processus X est un processus gaussien et donc en particulier que X_t est une variable aléatoire gaussienne. Calculons sa moyenne et sa variance. On a

$$\mathbb{E}[X_t]=e^{-ct}x,\quad\text{et,}\quad \mathrm{Var}(X_t)=\mathbb{E}\bigg[\Big(\int_0^t e^{c(s-t)}\sigma dW_s\Big)^2\bigg]=\sigma^2e^{-2ct}\int_0^t e^{2cs}ds=\sigma^2\frac{1-e^{-2ct}}{2c}.$$

2. Propriétés élémentaires du flot

On va travailler ici avec des conditions initiales déterministes ce qui permet de prendre comme filtration la filtration naturelle du mouvement brownien $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\ge0}$. On suppose que les fonctions

b et σ vérifie les hypothèses du théorème 3 – Lipschitz en espace et croissance linéaire. D'après le résultat précédent, on peut construire pour tout $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, la solution de l'EDS

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t b(r, X_r^{s,x})dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{s,x})dW_r, \quad s \le t \le T, \tag{4}$$

et l'on conviendra que $X_t^{s,x} = x$ si $0 \le t \le s$.

Dans le cas déterministe, si $\sigma = 0$, le flot de l'équation différentielle, noté $\varphi_t^{s,x}$ dans ce cas, possède de nombreuses propriétés ; en particulier :

1. $\varphi_t^{s,x}$ est Lipschitz en (s,x,t) ;
2. pour $r \le s \le t$, $\varphi_t^{r,x} = \varphi_t^{s,\varphi_s^{r,x}}$;
3. si $s \le t$, $x \longmapsto \varphi_t^{s,x}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Dans le cas stochastique, $X_t^{s,x}$ possède aussi des propriétés du même type. Dans le paragraphe suivant, nous étudierons la continuité de $(s,x,t) \longmapsto X_t^{s,x}$, puis le paragraphe suivant sera consacré à la propriété de composition. Nous n'aborderons pas le point 3 ; je vous renvoie aux livres de H. Kunita [Kun84, Kun90].

2.1. Continuité. Pour démontrer les propriétés de continuité du flot, nous allons utiliser le critère de Kolmogorov (théorème 36). Pour cela, nous devons établir des estimations sur les moments de $X_t^{s,x}$. Les démonstrations sont un peu techniques mais ne sont pas difficiles : il s'agit souvent d'utiliser les inégalités de Hölder, de Burkholder-Davis-Gundy – BDG dans la suite – et le lemme de Gronwall.

Proposition 4. *Soit $p \ge 1$. Il existe une constante C, dépendant de T et p, telle que :*

$$\forall s \in [0,T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} \big|X_t^{s,x}\big|^p\Big] \le C\Big(1 + |x|^p\Big) \tag{5}$$

Démonstration. On fait la preuve dans le cas $n = d = 1$.

Nous commençons par le cas $p \ge 2$. Fixons s et x. Nous notons X_t à la place de $X_t^{s,x}$ pour alléger l'écriture. Dans ce qui suit C est une constante dépendant de p et T dont la valeur peut changer d'une ligne sur l'autre mais qui ne dépend pas de (s,x).

On a, tout d'abord,

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p \le \sup_{t\in[0,s]} |X_t|^p + \sup_{t\in[s,T]} |X_t|^p \le |x|^p + \sup_{t\in[s,T]} |X_t|^p;$$

il suffit donc d'établir l'inégalité pour $\mathbb{E}\big[\sup_{t\in[s,T]} |X_t|^p\big]$.

Comme nous ne savons pas à priori si cette quantité est finie ou non, on introduit le temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t \in [0,T],\ |X_t| > n\}$, et on prend $n > |x|$ de sorte que $\tau_n > s$.

L'inégalité $(a+b+c)^p \le 3^{p-1}(a^p + b^p + c^p)$ fournit l'estimation, pour tout $u \in [s,T]$,

$$\begin{aligned} \big|X_{u\wedge\tau_n}\big|^p &\le 3^{p-1}\left(|x|^p + \sup_{s\le u\le t}\Big|\int_s^{u\wedge\tau_n} b(r,X_r)dr\Big|^p + \sup_{s\le u\le t}\Big|\int_s^{u\wedge\tau_n} \sigma(r,X_r)dW_r\Big|^p\right) \\ &\le 3^{p-1}\left(|x|^p + \Big(\int_s^{t\wedge\tau_n} \big|b(r,X_r)\big|dr\Big)^p + \sup_{s\le u\le t}\Big|\int_s^{u\wedge\tau_n} \sigma(r,X_r)dW_r\Big|^p\right). \end{aligned}$$

L'inégalité de BDG conduit à :

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\le u\le t\wedge\tau_n} \big|X_u\big|^p\Big] \le C\left(|x|^p + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^{t\wedge\tau_n} \big|b(r,X_r)\big|dr\Big)^p\Big] + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^{t\wedge\tau_n} \big|\sigma(r,X_r)\big|^2 dr\Big)^{p/2}\Big]\right),$$

et utilisant l'inégalité de Hölder ($p/2 \geq 1$), on a, notant p^* le conjugué de p et q celui de $p/2$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq u\leq t\wedge\tau_n} \big|X_u\big|^p\Big] \leq C\left(|x|^p + T^{p/p*}\mathbb{E}\Big[\int_s^{t\wedge\tau_n}\big|b(r,X_r)\big|^p dr\Big] + T^{p/2q}\mathbb{E}\Big[\int_s^{t\wedge\tau_n}\big|\sigma(r,X_r)\big|^p dr\Big]\right).$$

De plus, comme b et σ sont à croissance linéaire, on a :

$$\mathbb{E}\Big[\int_s^{t\wedge\tau_n}\big|b(r,X_r)\big|^p dr\Big] \leq K^p\mathbb{E}\Big[\int_s^{t\wedge\tau_n}\big(1+|X_r|\big)^p dr\Big] \leq C\left(1+\mathbb{E}\Big[\int_s^{t\wedge\tau_n}|X_r|^p dr\Big]\right),$$

et donc

$$\mathbb{E}\Big[\int_s^{t\wedge\tau_n}\big|b(r,X_r)\big|^p dr\Big] \leq C\left(1+\mathbb{E}\Big[\int_s^t \sup_{s\leq u\leq r\wedge\tau_n}|X_u|^p dr\Big]\right) \;;$$

et la même inégalité est valable pour le terme en σ.

Par suite, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq u\leq t\wedge\tau_n}\big|X_u\big|^p\right] \leq C\left(1+|x|^p + \int_s^t \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq u\leq r\wedge\tau_n}|X_u|^p\right]dr\right),$$

où C ne dépend pas de n. Le lemme de Gronwall donne alors, pour tout n,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq u\leq T\wedge\tau_n}\big|X_u\big|^p\Big] \leq C\big(1+|x|^p\big).$$

On fait tendre n vers l'infini et on applique le lemme de Fatou pour avoir :

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq u\leq T}\big|X_u\big|^p\Big] \leq C\big(1+|x|^p\big),$$

ce qui termine la preuve dans le cas $p \geq 2$.

Si maintenant $1 \leq p < 2$ alors $2p \geq 2$ et l'inégalité de Hölder donne

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq u\leq T}\big|X_u\big|^p\Big] \leq \left(\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq u\leq T}\big|X_u\big|^{2p}\Big]\right)^{1/2} \leq C^{1/2}\big(1+|x|^{2p}\big)^{1/2},$$

ce qui conduit à, notant que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq u\leq T}\big|X_u\big|^p\Big] \leq C^{1/2}\big(1+|x|^p\big).$$

Cette dernière inégalité termine la preuve de cette proposition. □

Nous savons à présent que la solution de l'EDS a des moments de tout ordre ; nous montrons une estimation du même type pour les moments des accroissements de X.

Proposition 5. *Soit $2 \leq p < \infty$. Il existe une constante C telle que, pour tout $(s,x),(s',x')$ appartenant à $[0,T]\times\mathbb{R}^n$,*

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq t\leq T}\big|X_t^{s,x}-X_t^{s',x'}\big|^p\Big] \leq C\Big(|x-x'|^p + |s-s'|^{p/2}\big(1+|x'|^p\big)\Big). \tag{6}$$

Démonstration. Fixons (s,x) et (s',x'). Trivialement,

$$|X_t^{s,x}-X_t^{s',x'}|^p \leq 2^{p-1}\big(|X_t^{s,x}-X_t^{s,x'}|^p + |X_t^{s,x'}-X_t^{s',x'}|^p\big)$$

de sorte que nous montrons l'inégalité pour chacun des deux termes précédents.

Commençons par le premier, $|X_t^{s,x} - X_t^{s,x'}|^p$. Il est inutile de prendre un temps d'arrêt car la proposition précédente nous dit que l'espérance du sup en t est fini. On a

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{s,x} - X_t^{s,x'}|^p \leq \sup_{t\in[0,s]} |X_t^{s,x} - X_t^{s,x'}|^p + \sup_{t\in[s,T]} |X_t^{s,x} - X_t^{s,x'}|^p,$$

de sorte que

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{s,x} - X_t^{s,x'}|^p \leq |x-x'|^p + \sup_{t\in[s,T]} |X_t^{s,x} - X_t^{s,x'}|^p;$$

par suite, on s'intéresse seulement au second membre de cette inégalité.

Pour tout $u \in [s,T]$, on a :

$$\begin{aligned} |X_u^{s,x} - X_u^{s,x'}|^p &\leq 3^{p-1}\Big(|x-x'|^p + \Big(\int_s^t \big|b(r,X_r^{s,x}) - b(r,X_r^{s,x'})\big|dr\Big)^p \\ &\qquad + \sup_{u\in[s,t]} \Big|\int_s^u \big(\sigma(r,X_r^{s,x}) - \sigma(r,X_r^{s,x'})\big)dW_r\Big|^p\Big). \end{aligned}$$

Les inégalités de BDG et de Hölder conduisent à l'inégalité, notant p^* le conjugué de p :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[s,t]} |X_u^{s,x} - X_u^{s,x'}|^p\Big] &\leq C\Big(|x-x'|^p + T^{p/p*}\mathbb{E}\Big[\int_s^t \big|b(r,X_r^{s,x}) - b(r,X_r^{s,x'})\big|^p dr\Big] \\ &\qquad + \mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t \big|\sigma(r,X_r^{s,x}) - \sigma(r,X_r^{s,x'})\big|^2 dr\Big)^{p/2}\Big]\Big). \end{aligned}$$

Utilisant une fois encore l'inégalité de Hölder, on obtient, notant q le conjugué de $p/2$,

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^t \big|\sigma(r,X_r^{s,x}) - \sigma(r,X_r^{s,x'})\big|^2 dr\Big)^{p/2}\Big] \leq T^{p/2q}\mathbb{E}\Big[\int_s^t \big|\sigma(r,X_r^{s,x}) - \sigma(r,X_r^{s,x'})\big|^p dr\Big];$$

b et σ étant Lipschitz, l'inégalité précédente donne

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[s,t]} |X_u^{s,x} - X_u^{s,x'}|^p\Big] \leq C\Big(|x-x'|^p + \int_s^t \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[s,r]} |X_u^{s,x} - X_u^{s,x'}|^p\Big]dr\Big).$$

Le lemme de Gronwall donne alors – en changeant C –

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[s,T]} |X_u^{s,x} - X_u^{s,x'}|^p\Big] \leq C|x-x'|^p.$$

Il reste à étudier le terme $\mathbb{E}\big[\sup_t |X_t^{s,x'} - X_t^{s',x'}|^p\big]$. On suppose, sans perte de généralité, que $s \leq s'$ et on coupe en trois morceaux i.e.

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{s,x'} - X_t^{s',x'}|^p \leq \sup_{t\in[0,s]} |X_t^{s,x'} - X_t^{s',x'}|^p + \sup_{t\in[s,s']} |X_t^{s,x'} - X_t^{s',x'}|^p + \sup_{t\in[s',T]} |X_t^{s,x'} - X_t^{s',x'}|^p,$$

d'où l'on déduit que

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{s,x'} - X_t^{s',x'}|^p \leq \sup_{t\in[s,s']} |X_t^{s,x'} - x'|^p + \sup_{t\in[s',T]} |X_t^{s,x'} - X_t^{s',x'}|^p.$$

Pour le premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente, on a,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[s,s']} |X_t^{s,x'} - x'|^p\Big] \leq 2^{p-1}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^{s'} \big|b(r,X_r^{s,x'})\big|dr\Big)^p\Big] + \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[s,s']}\Big|\int_s^t \sigma(r,X_r^{s,x'})dW_r\Big|^p\Big]\Big).$$

L'inégalité de Hölder et la majoration (5) (proposition 4) donnent, utilisant la croissance linéaire de b,

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^{s'}\big|b(r,X_r^{s,x'})\big|dr\Big)^p\Big] \le (s'-s)^p\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[s,s']}\big|b(u,X_u^{s,x'})\big|^p\Big] \le CT^{p/2}|s-s'|^{p/2}\big(1+|x'|^p\big).$$

D'autre part, l'inégalité de BDG, donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[s,s']}\Big|\int_s^t\sigma(r,X_r^{s,x'})dW_r\Big|^p\Big] &\le \mathbb{E}\Big[\Big(\int_s^{s'}\big|\sigma(r,X_r^{s,x'})\big|^2dr\Big)^{p/2}\Big]\\ &\le (s'-s)^{p/2}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[s,s']}\big|\sigma(u,X_u^{s,x'})\big|^p\Big],\end{aligned}$$

et, via la croissance de σ et l'estimation (5), on obtient

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[s,s']}\Big|\int_s^t\sigma(r,X_r^{s,x'})dW_r\Big|^p\Big] \le C|s-s'|^{p/2}\big(1+|x'|^p\big).$$

Finalement,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[s,s']}|X_t^{s,x'}-X_t^{s',x'}|^p\Big] \le C|s-s'|^{p/2}\big(1+|x'|^p\big). \tag{7}$$

Étudions pour finir le terme $\mathbb{E}\big[\sup_{t\in[s',T]}|X_t^{s,x'}-X_t^{s',x'}|^p\big]$. Remarquons que, pour $t\in[s',T]$,

$$\begin{aligned}X_t^{s,x'} &= X_{s'}^{s,x'}+\int_{s'}^t b(r,X_r^{s,x'})dr+\int_{s'}^t\sigma(r,X_r^{s,x'})dW_r,\\ X_t^{s',x'} &= x'+\int_{s'}^t b(r,X_r^{s',x'})dr+\int_{s'}^t\sigma(r,X_r^{s',x'})dW_r.\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $u\in[s',t]$,

$$\begin{aligned}\big|X_u^{s,x'}-X_u^{s',x'}\big|^p &\le 3^{p-1}\Bigg(\big|X_{s'}^{s,x'}-x'\big|^p+\Big(\int_{s'}^t\big|b(r,X_r^{s,x'})-b(r,X_r^{s',x'})\big|dr\Big)^p\\ &\qquad+\sup_{u\in[s',t]}\Big|\int_{s'}^t\big(\sigma(r,X_r^{s,x'})-\sigma(r,X_r^{s',x'})\big)dW_r\Big|^p\Bigg),\end{aligned}$$

et un calcul désormais familier, utilisant les inégalités de Hölder, et de BDG, conduit à, via la majoration (7) et le fait que b et σ sont Lipschitz,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[s',t]}\big|X_u^{s,x'}-X_u^{s',x'}\big|^p\Big] &\le C\Bigg(|s-s'|^{p/2}\big(1+|x'|^p\big)+\mathbb{E}\Big[\int_{s'}^t\big|X_r^{s,x'}-X_r^{s',x'}\big|^pdr\Big]\Bigg)\\ &\le C\Bigg(|s-s'|^{p/2}\big(1+|x'|^p\big)+\mathbb{E}\Big[\int_{s'}^t\sup_{u\in[s',r]}\big|X_u^{s,x'}-X_u^{s',x'}\big|^pdr\Big]\Bigg).\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à $r\longmapsto\sup_{u\in[s',r]}\big|X_u^{s,x'}-X_u^{s',x'}\big|^p$ donne alors

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[s',t]}\big|X_u^{s,x'}-X_u^{s',x'}\big|^p\Big] \le C|s-s'|^{p/2}\big(1+|x'|^p\big),$$

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 6. *Il existe une modification du processus X telle que l'application de $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathcal{S}^2_c$, $(s,x)\longmapsto(t\mapsto X^{s,x}_t)$ soit continue.*

En particulier, $(s,x,t)\longmapsto X^{s,x}_t$ est continue.

Démonstration. C'est une application directe de l'estimation précédente – valable pour tout $p\geq 2$ et du critère de Kolmogorov (théorème 36) vu au chapitre 1. □

Remarque. Il est important de remarquer que le corollaire précédent implique en particulier que, $\mathbb{P}$–p.s., pour tout (s,x,t), l'équation (4) est valable.

Nous terminons ce paragraphe en précisant la régularité du flot généré par l'EDS.

Proposition 7. *Soit $2\leq p<\infty$. Il existe une constante C telle que, pour tout (s,x,t), (s',x',t'),*

$$\mathbb{E}\Big[\big|X^{s,x}_t-X^{s',x'}_{t'}\big|^p\Big]\leq C\Big(|x-x'|^p+\big(1+|x'|^p\big)\big(|s-s'|^{p/2}+|t-t'|^{p/2}\big)\Big). \tag{8}$$

En particulier, les trajectoires $(s,x,t)\longmapsto X^{s,x}_t$ sont hölderiennes (localement en x) de paramètre β en s, α en x et β en t pour tout $\beta<1/2$ et $\alpha<1$.

Démonstration. La régularité des trajectoires résulte du critère de Kolmogorov et de l'estimation que nous allons montrer rapidement.

On a :

$$\big|X^{s,x}_t-X^{s',x'}_{t'}\big|\leq\big|X^{s,x}_t-X^{s',x'}_t\big|+\big|X^{s',x'}_t-X^{s',x'}_{t'}\big|.$$

Comme $(a+b)^p\leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$, il suffit d'établir l'estimation pour le second terme du majorant – le premier relevant de l'estimation (6) de la proposition 5. On suppose alors que $t\leq t'$; trois cas se présentent : $t\leq t'\leq s'$ (trivial), $t\leq s'\leq t'$ et $s'\leq t\leq t'$. Notons que le second cas se ramène au troisième puisque, si $t\leq s'\leq t'$, $X^{s',x'}_t=X^{s',x'}_{s'}$ et $|t-t'|\geq|t'-s'|$. On suppose donc que $s'\leq t\leq t'$. On a alors

$$X^{s',x'}_{t'}-X^{s',x'}_t=\int_t^{t'}b(r,X^{s',x'}_r)dr+\int_t^{t'}b(r,X^{s',x'}_r)dW_r,$$

et on doit estimer

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_t^{t'}\big|b(r,X^{s',x'}_r)\big|dr\Big)^p\Big],\quad\text{et,}\quad\mathbb{E}\Big[\Big|\int_t^{t'}\sigma(r,X^{s',x'}_r)dr\Big|^p\Big].$$

Or, d'après un calcul déjà effectué lors de la démonstration de la proposition 5 – voir page 8 – chacun des deux termes précédents est majoré par $C|t-t'|^{p/2}\big(1+|x'|^p\big)$ ce qui termine la démonstration. □

2.2. Propriété de Markov.

Nous allons établir la propriété de Markov pour les solutions de l'EDS (4) comme conséquence de la propriété de flot.

Proposition 8. *Soit $x\in\mathbb{R}^n$; soient $0\leq r\leq s\leq t$. On a*

$$X^{r,x}_t=X^{s,X^{r,x}_s}_t,\qquad \mathbb{P}\text{–p.s.}$$

Démonstration. C'est la remarque 2.1 qui fournit le résultat. En effet, $\mathbb{P}$–p.s.

$$\forall s,y,t,\qquad X^{s,y}_t=y+\int_s^t b(u,X^{s,y}_u)du+\int_s^t\sigma(u,X^{s,y}_u)dW_u.$$

Il vient alors, $\mathbb{P}$–p.s.,

$$\forall t, \qquad X_t^{s,X_s^{r,x}} = X_s^{r,x} + \int_s^t b\big(u, X_u^{s,X_s^{r,x}}\big)du + \int_s^t \sigma\big(u, X_u^{s,X_s^{r,x}}\big)dW_u.$$

On remarque que $X_\cdot^{r,x}$ est aussi solution de cette dernière EDS sur $[s,T]$ puisque

$$\begin{aligned} X_t^{r,x} &= x + \int_r^t b(u, X_u^{r,x})du + \int_r^t \sigma(u, X_u^{r,x})dW_u \\ &= X_s^{r,x} + \int_s^t b(u, X_u^{r,x})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{r,x})dW_u. \end{aligned}$$

L'unicité des solutions d'une EDS à coefficients Lipschitz donne alors – en fait à l'indistinguabilité près sur $[s,T]$ – $X_t^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}$. □

Remarque. En fait, par continuité, l'égalité $X_t^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}$ a lieu pour tout x et pour tout $0 \leq r \leq s \leq t \leq T$ en dehors d'un ensemble $\mathbb{P}$–négligeable.

Nous allons à présent établir la propriété de Markov. Rappelons qu'un processus X est markovien s'il ne dépend du passé que par l'intermédiaire du présent. Mathématiquement cela conduit à la définition suivante :

Définition 9. Propriété de Markov. Soit X un processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. On dit que X possède la propriété de Markov par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour toute fonction borélienne bornée f, et pour tout $s \leq t$, on a

$$\mathbb{E}\big(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\big) = \mathbb{E}\big(f(X_t) \mid X_s\big), \quad \mathbb{P}\text{–}p.s.$$

Montrons la propriété de Markov pour les solutions de l'EDS (4) par rapport à la tribu du mouvement brownien W.

Théorème 10. *Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $s \in [0,T]$. $\big(X_t^{s,x}\big)_{0\leq t\leq T}$ est un processus de Markov par rapport à la filtration du MB et si f est mesurable et bornée alors, pour $s \leq r \leq t$,*

$$\mathbb{E}\big(f(X_t^{s,x}) \mid \mathcal{F}_r\big) = \Lambda(X_r^{s,x}) \quad \mathbb{P}\text{–}p.s.$$

avec $\Lambda(y) = \mathbb{E}\big[f(X_t^{r,y})\big]$.

Démonstration. Soient $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. D'après la propriété du flot, on a $X_t^{s,x} = X_t^{r,X_r^{s,x}}$. De plus, nous démontrerons au chapitre 5 – ou alors voir par exemple [Fri75] – que $X_t^{r,y}$ est mesurable par rapport à la tribu des accroissements du mouvement brownien $\sigma\{W_{r+u} - W_r,\ u \in [0, t-r]\}$. Donc,

$$X_t^{r,y} = \Phi\big(y, W_{r+u} - W_r; 0 \leq u \leq t-r\big),$$

où Φ est mesurable. Par suite,

$$X_t^{s,x} = X_t^{r,X_r^{s,x}} = \Phi\big(X_r^{s,x}, W_{r+u} - W_r; 0 \leq u \leq t-r\big).$$

Pour conclure, il faut encore remarquer que $X_r^{s,x}$ est $\mathcal{F}_r$–mesurable et noter que $\mathcal{F}_r$ est indépendante de la tribu $\sigma\{W_{r+u} - W_r,\ u \in [0, t-r]\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(f(X_t^{s,x}) \mid \mathcal{F}_r\big) &= \mathbb{E}\Big(f\big\{\Phi\big(X_r^{s,x}, W_{r+u} - W_r; 0 \leq u \leq t-r\big)\big\} \mid \mathcal{F}_r\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big[f\big\{\Phi\big(y, W_{r+u} - W_r; 0 \leq u \leq t-r\big)\big\}\Big]\Big|_{y=X_r^{s,x}} \\ &= \mathbb{E}\Big[f\big(X_t^{r,y}\big)\Big]\Big|_{y=X_r^{s,x}} \\ &= \Lambda\big(X_r^{s,x}\big). \end{aligned}$$

Ce qui montre la propriété annoncée. □

On peut également montrer que, si g est mesurable et, par exemple bornée,

$$\mathbb{E}\Big(\int_r^T g(u, X_u^{s,x})du \mid \mathcal{F}_r\Big) = \Gamma(r, X_r^{s,x}),$$

où $\Gamma(r,y) = \mathbb{E}\big[\int_r^T g(u, X_u^{r,y})du\big]$.

Remarque. Si b et σ ne dépendent pas du temps – on dit que l'EDS est autonome – on peut montrer que la loi de $X_t^{s,x}$ est la même que la loi de $X_{t-s}^{0,x}$. On a alors :

$$\mathbb{E}\big(f(X_t^{s,x}) \mid \mathcal{F}_r\big) = \mathbb{E}\big[f(X_{t-r}^{0,y})\big]_{|y=X_r^{s,x}}.$$

Références

[Fri75] A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications I*, Probab. Math. Stat., vol. 28, Academic Press, New York, 1975.

[Kun84] H. Kunita, *Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms*, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XII—1982 (P.-L. Hennequin, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 1097, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, pp. 143–303.

[Kun90] ______, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Chapitre 5

Le cadre markovien

Nous considérons ici des EDSR « markoviennes » : il s'agit d'un cadre très spécifique dans lequel la dépendance de la condition terminale et du générateur de l'EDSR dans l'aléat ω se fait au travers de la solution d'une EDS. Nous verrons que la propriété de Markov pour les EDS se transfère aux EDSR ; d'où le nom du chapitre.

1. Le modèle

1.1. Hypothèses et notations. La donnée de base est toujours un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien W d-dimensionnel. La filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle de W augmentée de sorte que les conditions habituelles sont satisfaites.

On considère deux fonctions $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ continues. On suppose qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que, pour tout t, pour tout x, x' de $\mathbb{R}^n$,

1. $\left|b(t,x) - b(t,x')\right| + \left\|\sigma(t,x) - \sigma(t,x')\right\| \leq K|x - x'|$;
2. $\left|b(t,x)\right| + \left\|\sigma(t,x)\right\| \leq K(1 + |x|)$.

Sous ces hypothèses, on peut construire, étant donnés un réel $t \in [0,T]$ et une variable aléatoire $\theta \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_t)$, $\{X_u^{t,\theta}\}_{t\leq u\leq T}$ la solution de l'EDS

$$X_u^{t,\theta} = \theta + \int_t^u b\big(r, X_r^{t,\theta}\big)dr + \int_t^u \sigma\big(r, X_r^{t,\theta}\big)dW_r, \qquad t \leq u \leq T \ ; \tag{1}$$

on convient, que si $0 \leq u \leq t$, $X_u^{t,\theta} = \mathbb{E}(\theta \,|\, \mathcal{F}_u)$. Les propriétés de $\{X_u^{t,\theta}\}_{t\leq u\leq T}$ ont été étudiées au Chapitre 4 surtout dans le cas $\theta = x \in \mathbb{R}^n$.

Considérons aussi deux fonctions continues $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ et $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Nous supposons que f et g vérifient les hypothèses suivantes : il existe deux réels μ et $p \geq 1$ tels que, pour tout (t, x, y, y', z, z'),

1. $(y - y') \cdot \big(f(t,x,y,z) - f(t,x,y',z)\big) \leq \mu|y - y'|^2$;
2. $\big|f(t,x,y,z) - f(t,x,y,z')\big| \leq K\|z - z'\|$;
3. $\big|g(x)\big| + \big|f(t,x,y,z)\big| \leq K\big(1 + |x|^p + |y| + \|z\|\big)$.

Sous ces hypothèses, si θ appartient à $\mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$, on peut résoudre l'EDSR

$$Y_u^{t,\theta} = g\big(X_T^{t,\theta}\big) + \int_u^T f\big(r, X_r^{t,\theta}, Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta}\big)dr - \int_u^T Z_r^{t,\theta}dW_r, \qquad 0 \leq u \leq T. \tag{2}$$

Dans tout ce chapitre, nous supposerons que les hypothèses précédentes sur les coefficients b, σ, f et g sont satisfaites. Parfois, nous ferons une hypothèse plus forte sur f et g en supposant que g est K–Lipschitz et que f est K–Lipschitz en x uniformément en (t, y, z). Dans ce cas, $p = 1$. Nous désignerons cette hypothèse par (Lip).

1.2. Premières propriétés.

Rappels sur les EDS. Rappelons tout d'abord quelques propriétés des EDS que nous avons établies lors du Chapitre 4. Nous commençons par des estimations dans L^q avec $q \geq 2$.

La première chose à signaler est que le théorème d'Itô sur les EDS (Théorème 3) garantit l'existence et l'unicité de $\{X_u^{t,\theta}\}_{0\leq u\leq T}$. De plus, il existe une constante C telle que, pour tout $t \in [0,T]$ et θ, $\theta' \in \mathrm{L}^q(\mathcal{F}_t)$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T}\left|X_u^{t,\theta}\right|^q\right] \leq C\left(1+\mathbb{E}\big[|\theta|^q\big]\right), \qquad \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T}\left|X_u^{t,\theta}-X_u^{t,\theta'}\right|^q\right] \leq C\,\mathbb{E}\big[|\theta-\theta'|^q\big].$$

Dans le même esprit, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T}\left|X_u^{t,x}-X_u^{t',x'}\right|^q\right] \leq C\left\{|x-x'|^q+|t-t'|^{q/2}\big(1+|x|^q\big)\right\}.$$

Notons si $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \geq t$, $\Lambda(\omega,t,x,u) = X_u^{t,x}(\omega)$. On est naturellement amené à comparer deux objets : $\Lambda\big(\omega,t,\theta(\omega),u\big)$ d'une part et $X_u^{t,\theta}(\omega)$ d'autre part. Nous avons vu au Chapitre 4 que $\mathbb{P}$–p.s.,

$$\Lambda\big(\omega,t,\theta(\omega),u\big) = X_u^{t,\theta}(\omega), \qquad t\leq u\leq T.$$

L'EDSR (2). Nous donnons deux propriétés élémentaires de l'équation (2).

Proposition 1. *Si $\theta \in \mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$, l'EDSR (2) possède une unique solution (vérifiant $Z \in \mathrm{M}^2$), $\big\{(Y_u^{t,\theta}, Z_u^{t,\theta})\big\}_{0\leq u\leq T}$. Il existe une constante C telle que, pour tout t, pour tout $\theta \in \mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T}\left|Y_u^{t,\theta}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}\right\|^2dr\right] \leq C\left(1+\mathbb{E}\left[|\theta|^{2p}\right]\right).$$

Démonstration. Commençons par écrire l'équation (2) sous la forme d'une EDSR telle que nous les avons étudiées dans les deux chapitres précédents. Pour cela, on résout d'abord l'EDS (1), puis on définit

$$\bar\xi = g\big(X_T^{t,\theta}\big), \qquad \bar f(\omega,r,y,z) = f\big(r,X_r^{t,\theta}(\omega),y,z\big).$$

Avec ces notations, l'équation (2) n'est rien d'autre que l'EDSR

$$Y_u = \bar\xi + \int_u^T \bar f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0\leq u\leq T.$$

Pour la première partie de la proposition, il suffit de montrer, vues les hypothèses du chapitre, que $\bar\xi$ est de carré intégrable et qu'il en va de même pour le processus $\{\bar f(r,0,0)\}_r$. Mais, d'après la croissance de g et f, on a

$$\forall r\in[0,T], \qquad \big|\bar\xi\big| + \big|\bar f(r,0,0)\big| \leq K\left(1+\sup_{0\leq u\leq T}\left|X_u^{t,\theta}\right|^p\right) ;$$

le résultat s'en suit immédiatement puisque, comme $\theta \in \mathrm{L}^{2p}$, il en est de même de $\sup_{0\leq u\leq T}\left|X_u^{t,\theta}\right|$ d'après le rappel sur les EDS.

Pour établir la majoration, on utilise les estimations à priori du Chapitre 3 cf. Proposition 1, si $\alpha = 2\mu + 2K^2$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T}\left|Y_u^{t,\theta}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}\right\|^2dr\right] \leq C_u(1+T)e^{|\alpha|T}\,\mathbb{E}\left[\left|g\big(X_T^{t,\theta}\big)\right|^2+\int_0^T\left|f\big(r,X_r^{t,\theta},0,0\big)\right|^2dr\right],$$

ce qui compte tenu de la croissance de f et g donne

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,\theta}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}\right\|^2dr\right]\le C\left(1+\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le T}\left|X_u^{t,\theta}\right|^{2p}\right]\right),$$

et par suite, pour une autre constante C,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,\theta}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}\right\|^2dr\right]\le C\left(1+\mathbb{E}\left[|\theta|^{2p}\right]\right),$$

ce que l'on voulait établir. □

Remarque. En particulier, lorsque θ est constante égale à x, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,x}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,x}\right\|^2dr\right]\le C\left(1+|x|^{2p}\right).$$

Proposition 2. *Si θ_n converge vers θ dans $\mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$, alors*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,\theta}-Y_u^{t,\theta_n}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}-Z_r^{t,\theta_n}\right\|^2dr\right]\longrightarrow 0,\qquad si\quad n\to\infty.$$

De plus, sous l'hypothèse (Lip), on a, si θ et θ' sont $\mathcal{F}_t$–mesurables et de carré intégrable,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,\theta}-Y_u^{t,\theta'}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}-Z_r^{t,\theta'}\right\|^2dr\right]\le C\,\mathbb{E}\left[|\theta-\theta'|^2\right].$$

Démonstration. Le point de départ est encore une fois les estimations à priori cf. Corollaire 2. On a donc, si θ et θ' sont deux éléments de $\mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$, notant $\alpha=2\mu+2K^2$, un contrôle de

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le T}\left|Y_u^{t,\theta}-Y_u^{t,\theta'}\right|^2+\int_0^T\left\|Z_r^{t,\theta}-Z_r^{t,\theta'}\right\|^2dr\right]$$

par la quantité, à la constante multiplicative $C_u(1+T)e^{|\alpha|T}$ près,

$$\mathbb{E}\left[\left|g\big(X_T^{t,\theta}\big)-g\big(X_T^{t,\theta'}\big)\right|^2+\int_0^T\left|f\big(r,X_r^{t,\theta},Y_r^{t,\theta},Z_r^{t,\theta}\big)-f\big(r,X_r^{t,\theta'},Y_r^{t,\theta},Z_r^{t,\theta}\big)\right|^2dr\right].$$

Sous l'hypothèse (Lip), cette dernière s'estime facilement ; on obtient comme majorant, C, C' désignant deux constantes dépendant de T, μ, K,

$$C'\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\le r\le T}\left|X_r^{t,\theta}-X_r^{t,\theta'}\right|^2\right]\le C\,\mathbb{E}\left[|\theta-\theta'|^2\right],$$

d'après les résultats sur les EDS.

En l'absence de l'hypothèse (Lip), on doit montrer que l'on conserve la convergence vers 0 si on prend $\theta'=\theta_n$ avec $\theta_n\longrightarrow\theta$ dans L^{2p}. Les estimations sur les EDS donnent,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le r\le T}\left|X_r^{t,\theta}-X_r^{t,\theta_n}\right|^{2p}\right]\le C\,\mathbb{E}\left[|\theta-\theta_n|^{2p}\right]\longrightarrow 0\ ;\tag{3}$$

ceci fournit la convergence en probabilité de $g\big(X_T^{t,\theta_n}\big)$ vers $g\big(X_T^{t,\theta}\big)$ par continuité de g ainsi que la convergence en $\mathbb{P}\otimes m$–mesure de

$$f\big(r, X_r^{t,\theta_n}, Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta}\big) \quad \text{vers} \quad f\big(r, X_r^{t,\theta}, Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta}\big)$$

vue la continuité de f. Il reste donc à établir l'équi-intégrabilité. Pour cela il suffit de noter que la croissance de f et g conduit à l'inégalité

$$\left|g\big(X_T^{t,\theta_n}\big)\right| + \left|f\big(r, X_r^{t,\theta_n}, Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta}\big)\right| \leq K\left(1 + \sup_{0\leq r\leq T}\left|X_r^{t,\theta_n}\right|^p + \left|Y_r^{t,\theta}\right| + \left\|Z_r^{t,\theta}\right\|\right),$$

et le dernier majorant converge dans L^2 essentiellement en vertu de (3). Le résultat s'en suit directement. □

2. La propriété de Markov

Dans ce paragraphe, nous allons établir que la propriété de Markov des solutions d'EDS se transfère aux solutions d'EDSR. Cette propriété est importante pour les applications aux EDP. Nous commençons par montrer que $Y_t^{t,x}$ est une quantité déterministe. Introduisons une nouvelle notation : si $t \leq u$, $\mathcal{F}_u^t = \sigma\big(\mathcal{N},\ W_r - W_t,\ t \leq r \leq u\big)$.

Proposition 3. *Soit $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$. $\{(X_u^{t,x}, Y_u^{t,x},)\}_{t\leq u\leq T}$ est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_u^t\}_{t\leq u\leq T}$. En particulier, $Y_t^{t,x}$ est déterministe.*

On peut choisir une version de $\{Z_u^{t,x}\}_{t\leq u\leq T}$ adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_u^t\}_{t\leq u\leq T}$.

Démonstration. Considérons le processus $\{B_u\}_{u\geq 0}$ définie par $B_u = W_{t+u} - W_t$ et notons $\{\mathcal{G}_u\}_u$ sa filtration naturelle augmentée. B est un mouvement brownien et on a de plus $\mathcal{G}_u = \mathcal{F}_{t+u}^t$.

Soit $\{X_u\}_{0\leq u\leq T-t}$ la solution $\{\mathcal{G}_u\}_u$–adaptée de l'EDS

$$X_u = x + \int_0^u b(t+r, X_r)dr + \int_0^u \sigma(t+r, X_r)dB_r, \qquad 0 \leq u \leq T-t.$$

En particulier, pour tout $v \in [t,T]$, on a

$$X_{v-t} = x + \int_0^{v-t} b(t+r, X_r)dr + \int_0^{v-t} \sigma(t+r, X_r)dB_r.$$

Dans les deux intégrales, on fait le changement de variables $s = r+t$ pour obtenir – le changement dans l'intégrale stochastique sera justifiée à la fin de la preuve –

$$\int_0^{v-t} b(t+r, X_r)dr = \int_t^v b(s, X_{s-t})ds, \qquad \int_0^{v-t} \sigma(t+r, X_r)dB_r = \int_t^v \sigma(s, X_{s-t})dW_s,$$

et par suite,

$$X_{v-t} = x + \int_t^v b(s, X_{s-t})ds + \int_t^v \sigma(s, X_{s-t})dW_s, \qquad t \leq v \leq T\ ;$$

on a, d'autre part, par définition du processus $X^{t,x}$,

$$X_v^{t,x} = x + \int_t^v b(s, X_s^{t,x})ds + \int_t^v \sigma(s, X_s^{t,x})dW_s, \qquad t \leq v \leq T.$$

L'EDS de coefficients b, σ et de condition initiale x en t possède deux solutions : X_{v-t} et $X_v^{t,x}$. Par unicité des solutions d'EDS à coefficients Lipschitz, ces deux processus sont indistinguables :

$\mathbb{P}$–p.s., $\forall v \in [t,T]$, $X_{v-t} = X_v^{t,x}$. En particulier, $X_v^{t,x}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{G}_{v-t}$ puisqu'il en est ainsi pour X_{v-t}. Or $\mathcal{G}_{v-t} = \mathcal{F}_v^t$.

Le résultat pour les EDSR se déduit de celui que nous venons d'établir pour les EDS. En effet, on considère la solution $\{(Y_u, Z_u)\}_{0 \le u \le T-t}$, $\mathcal{G}_u$–adaptée de l'EDSR

$$Y_u = g(X_{T-t}) + \int_u^{T-t} f(t+r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_u^{T-t} Z_r dB_r, \qquad 0 \le u \le T-t,$$

soit encore

$$Y_{v-t} = g(X_{T-t}) + \int_{v-t}^{T-t} f(t+r, X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_{v-t}^{T-t} Z_r dB_r, \qquad t \le v \le T.$$

On effectue le changement de variables $s = t+r$ dans les deux intégrales, pour obtenir

$$Y_{v-t} = g(X_{T-t}) + \int_v^T f(s, X_{s-t}, Y_{s-t}, Z_{s-t})ds - \int_v^T Z_{s-t} dW_s, \qquad t \le v \le T.$$

Il s'en suit que $\{Y_{v-t}, Z_{v-t}\}_{v\in[t,T]}$ est solution sur $[t,T]$ de l'EDSR (2) pour $\theta = x$ puisque nous savons déjà que $X_{v-t} = X_v^{t,x}$. L'unicité des solutions des EDSR donne, dans $\mathcal{S}_c^2 \times \mathrm{M}^2$, $\{Y_{v-t}, Z_{v-t}\}_{v\in[t,T]} = \{Y_v^{t,x}, Z_v^{t,x}\}_{v\in[t,T]}$ et la mesurabilité recherchée puisque $\{Y_{v-t}, Z_{v-t}\}_{v\in[t,T]}$ est adapté par rapport à $\mathcal{G}_{v-t} = \mathcal{F}_v^t$.

Pour être tout à fait complet, justifions le changement de variables dans les intégrales stochastiques i.e. si $\{h(r)\}_{0\le r\le T-t}$ est un processus de carré intégrable et $\mathcal{G}_r$–adapté,

$$\int_0^u h(r)dB_r = \int_t^{t+u} h(s-t)dW_s, \qquad 0 \le u \le T-t,$$

où rappelons-le $B_r = W_{t+r} - W_t$. Le résultat est immédiat si $h(r) = h_a \mathbf{1}_{]a,b]}(r)$ avec h_a une v.a. bornée, $\mathcal{G}_a$–mesurable. En effet, on a

$$\int_0^u h(r)dB_r = h_a \left(B_{u\wedge b} - B_{u\wedge a}\right) = h_a \left(W_{t+u\wedge b} - W_{t+u\wedge a}\right),$$

et aussi, comme $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{F}_{t+a}$,

$$\int_t^{u+t} h(s-t)dW_s = \int_t^{u+t} h_a \mathbf{1}_{[t+a,t+b[}(s)dW_s = h_a \left(W_{(t+u)\wedge(t+b)} - W_{(t+u)\wedge(t+a)}\right).$$

Par linéarité, le résultat est valable pour tous les processus simples. Si maintenant, h est un processus de carré intégrable et $\mathcal{G}_u$–adapté, il existe une suite processus simples h_n, $\mathcal{G}_u$–adaptés, tels que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} |h_n(r) - h(r)|^2 dr\right] \longrightarrow 0.$$

On en déduit immédiatement que

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T |h_n(s-t) - h(s-t)|^2 ds\right] \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{F}_{t+s}$, $\{h_n(s-t)\}_s$ et par suite $\{h(s-t)\}_s$ sont $\mathcal{F}_s$–progressivement mesurables. Pour finir, il suffit de noter que, d'une part

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le u\le T-t}\left|\int_0^u (h_n(r) - h(r))\, dB_r\right|^2\right] \le 4\,\mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} |h_n(r) - h(r)|^2 dr\right]$$

et que d'autre part

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\le u\le T}\left|\int_t^u (h_n(s-t)-h(s-t))\,dW_s\right|^2\right]\le 4\,\mathbb{E}\left[\int_t^T |h_n(s-t)-h(s-t)|^2\,ds\right],$$

ce qui achève la démonstration de cette proposition. □

Puisque nous savons que $Y_t^{t,x}$ est une quantité déterministe, on peut définir une fonction en posant,

$$\forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n,\qquad u(t,x):=Y_t^{t,x}.$$

Commençons par étudier la croissance et la continuité de cette fonction.

Proposition 4. *La fonction u est continue et à croissance polynomiale. On a*

$$\forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n,\qquad |u(t,x)|\le C\left(1+|x|^p\right).$$

Sous l'hypothèse (Lip), la fonction u vérifie de plus, pour tout (t,x), (t',x'),

$$|u(t,x)-u(t',x')|\le C\left(|x-x'|+|t-t'|^{1/2}(1+|x|)\right).$$

Démonstration. La croissance de la fonction u a déjà été notée lors de la Remarque 1.2. Montrons la continuité. C désigne une constante dépendant de K et T qui peut changer au cours du texte. Soient (t,x) et (t',x') deux points de $[0,T]\times\mathbb{R}^n$. On a

$$u(t',x')-u(t,x)=Y_{t'}^{t',x'}-Y_t^{t,x}=\mathbb{E}\left[Y_{t'}^{t',x'}-Y_t^{t,x}\right]=\mathbb{E}\left[Y_{t'}^{t',x'}-Y_{t'}^{t,x}\right]+\mathbb{E}\left[Y_{t'}^{t,x}-Y_t^{t,x}\right]\ ;$$

si $t\ge t'$ – on procède de même si $t<t'$ –,

$$Y_{t'}^{t,x}=Y_t^{t,x}+\int_{t'}^t f\big(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x}\big)\,dr-\int_{t'}^t Z_r^{t,x}\,dW_r,$$

et par suite, on obtient, à l'aide de l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[Y_{t'}^{t,x}-Y_t^{t,x}\right]\right|^2 &= \left|\mathbb{E}\left[\int_{t'}^t f\big(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x}\big)\,dr\right]\right|^2\\ &\le |t-t'|\;\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|f\big(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x}\big)\right|^2\,dr\right].\end{aligned}$$

Or, utilisant la croissance de f, on obtient,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|f\big(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x}\big)\right|^2\,dr\right] &\le C\,\mathbb{E}\left[1+\sup_{0\le r\le T}\left\{\left|X_r^{t,x}\right|^{2p}+\left|Y_r^{t,x}\right|^2\right\}+\int_0^T \left\|Z_r^{t,x}\right\|^2\,dr\right]\\ &\le C\left(1+|x|^{2p}\right).\end{aligned}$$

D'autre part, on a, $\left|\mathbb{E}\left[Y_{t'}^{t',x'}-Y_{t'}^{t,x}\right]\right|^2\le\mathbb{E}\left[\sup_{r\in[0,T]}\left|Y_r^{t',x'}-Y_r^{t,x}\right|^2\right]$, et les estimations à priori fournissent

$$C\,\mathbb{E}\left[\left|g\big(X_T^{t',x'}\big)-g\big(X_T^{t,x}\big)\right|^2+\int_0^T\left|f\big(r,X_r^{t',x'},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x}\big)-f\big(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x}\big)\right|^2dr\right]$$

comme majorant. Notons $\Delta(t,x,t',x')$ cette quantité (sans la constante multiplicative). Nous venons de montrer que

$$|u(t',x') - u(t,x)|^2 \le C\left(\Delta(t,x,t',x') + |t-t'|\left(1+|x|^{2p}\right)\right). \tag{4}$$

Sous l'hypothèse (Lip), nous avons $p=1$ et, de plus,

$$\Delta(t,x,t',x') \le C\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\le r\le T}\left|X_r^{t',x'} - X_r^{t,x}\right|^2\right] \le C\left(|x-x'|^2 + |t-t'|\left(1+|x|^2\right)\right),$$

d'après la Proposition 5.

Dans le cas général, soit $\{(t_n,x_n)\}_n$ une suite de points de $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ convergeant vers (t,x). On prend $(t',x') = (t_n,x_n)$ dans l'inégalité (4) ; il suffit de montrer que $\Delta_n = \Delta(t,x,t_n,x_n)$ tend vers 0 quand $n\to\infty$. Or, d'après la Proposition 5, on a, pour tout $q\ge 1$,

$$\sup_{0\le r\le T}\left|X_r^{t,x} - X_r^{t_n,x_n}\right| \longrightarrow 0, \qquad \text{dans } \mathrm{L}^q.$$

La continuité de g et f donnent alors $g\big(X_T^{t_n,x_n}\big) \longrightarrow g\big(X_T^{t,x}\big)$ en probabilité et

$$f\big(r, X_r^{t_n,x_n}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\big) \longrightarrow f\big(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\big) \quad \text{en } \mathbb{P}\otimes m\text{–mesure.}$$

Pour conclure, nous devons établir l'équi-intégrabilité des carrés. Mais cela résulte simplement de l'inégalité

$$\left|g\big(X_T^{t_n,x_n}\big)\right|^2 + \left|f\big(r, X_r^{t_n,x_n}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\big)\right|^2 \le C\left(1 + \sup_{0\le r\le T}\left|X_r^{t_n,x_n}\right|^{2p} + \sup_{0\le r\le T}\left|Y_r^{t,x}\right|^2 + \left\|Z_r^{t,x}\right\|^2\right)$$

puisque comme déjà dit $\sup_{0\le r\le T}|X_r^{t_n,x_n}|$ converge dans tous les L^q. □

À l'aide de cette fonction, nous pouvons établir la propriété de Markov pour les EDSR.

Théorème 5. *Soient $t\in[0,T]$ et $\theta\in\mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$. On a :*

$$\mathbb{P}\text{–}p.s. \qquad Y_t^{t,\theta} = u(t,\theta) = Y_t^{t,\cdot}\circ\theta.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que θ soit une variable aléatoire étagée : $\theta = \sum_{i=1}^{l} x_i\,\mathbf{1}_{A_i}$ où $(A_i)_{1\le i\le l}$ est une partition $\mathcal{F}_t$–mesurable de Ω et $x_i\in\mathbb{R}^n$ pour tout $i=1,\ldots,l$. Notons $\big(X_r^i, Y_r^i, Z_r^i\big)_{0\le r\le T}$ à la place de $(X_r^{t,x_i}, Y_r^{t,x_i}, Z_r^{t,x_i})_{0\le r\le T}$. On a alors, pour $t\le r\le T$,

$$X_r^{t,\theta} = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} X_r^i, \quad Y_r^{t,\theta} = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} Y_r^i, \quad Z_r^{t,\theta} = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} Z_r^i.$$

En effet, par définition, pour tout i, si $r\ge t$,

$$X_r^i = x_i + \int_t^r b(u, X_u^i)du + \int_t^r \sigma(u, X_u^i)dW_u,$$

et, en multipliant par $\mathbf{1}_{A_i}$ et faisant la somme sur i, on obtient – les indicatrices rentrent à l'intérieur de l'intégrale stochastique puisque $A_i\in\mathcal{F}_t$ –

$$\sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} X_r^i = \theta + \int_t^r \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i}\, b(u, X_u^i)du + \int_t^r \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i}\,\sigma(u, X_u^i)dW_u\ ;$$

or on a $\sum_i \mathbf{1}_{A_i} H(T_i) = H\left(\sum_i \mathbf{1}_{A_i} T_i\right)$. Il s'en suit que

$$\sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} X_r^i = \theta + \int_t^r b\Big(u, \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} X_u^i\Big)\,du + \int_t^r \sigma\Big(u, \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} X_u^i\Big)\,dW_u.$$

Par unicité des solutions d'EDS à coefficients Lipschitz, on a

$$\mathbb{P}\text{–}p.s., \qquad \forall t \leq r \leq T, \qquad X_r^{t,\theta} = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} X_r^i.$$

De la même façon, on a, pour tout i, si $t \leq r \leq T$,

$$Y_r^i = g\big(X_T^i\big) + \int_r^T f\big(u, X_u^i, Y_u^i, Z_u^i\big)\, du - \int_r^T Z_u^i \, dW_u,$$

et multipliant par $\mathbf{1}_{A_i}$ et faisant la somme sur i, on montre, utilisant la relation déjà établie pour la diffusion que $\big(\sum_i \mathbf{1}_{A_i} Y_r^i, \sum_i \mathbf{1}_{A_i} Z_r^i\big)$ est solution sur $[t, T]$ de l'EDSR

$$Y_r' = g\big(X_T^{t,\theta}\big) + \int_r^T f\big(u, X_u^{t,\theta}, Y_u', Z_u'\big)\, du - \int_r^T Z_u' \, dW_u$$

dont $\big(Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta}\big)$ est également solution par définition. L'unicité des solutions des EDSR donnent

$$\mathbb{P}\text{–}p.s., \quad \forall t \leq r \leq T, \quad Y_r^{t,\theta} = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} Y_r^i, \qquad Z_r^{t,\theta} = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} Z_r^i, \quad \mathbb{P} \otimes m\text{–p.p. sur } \Omega \times [t, T].$$

En particulier, pour $r = t$, on a, revenant aux notations de départ,

$$\mathbb{P}\text{–p.s.} \qquad Y_t^{t,\theta} = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} Y_t^i = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} Y_t^{t,x_i} = \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} u(t, x_i) = u\Big(t, \sum\nolimits_i \mathbf{1}_{A_i} x_i\Big) = u(t, \theta).$$

Avant de traiter le cas général, examinons ce qui se passe sous l'hypothèse (Lip). Considérons une suite de v.a. θ_n, $\mathcal{F}_t$–étagées, qui converge vers θ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_t)$. La Proposition 2 fournit l'estimation

$$\mathbb{E}\left[\left|Y_t^{t,\theta_n} - Y_t^{t,\theta}\right|^2\right] \leq C\, \mathbb{E}\left[|\theta_n - \theta|^2\right]$$

et, d'après la Proposition 4, $u(t, \cdot)$ est Lipschitzienne ce qui implique que

$$\mathbb{E}\left[|u(t, \theta_n) - u(t, \theta)|^2\right] \leq C\, \mathbb{E}\left[|\theta_n - \theta|^2\right].$$

Or d'après l'étape précédente, pour tout entier n, $u(t, \theta_n) = Y_t^{t,\theta_n}$; on en déduit directement que $u(t, \theta) = Y_t^{t,\theta}$, $\mathbb{P}$–p.s.

Dans le cas général, considérons une suite de v.a. θ_n, $\mathcal{F}_t$–étagées, qui converge vers θ dans $\mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$. La Proposition 2 entraîne toujours que

$$Y_t^{t,\theta_n} \longrightarrow Y_t^{t,\theta}, \qquad \text{dans } \mathrm{L}^2, \qquad \text{si } n \to \infty,$$

et, de plus, la continuité de l'application $u(t, \cdot)$ implique, en particulier, la convergence de $u(t, \theta_n)$ vers $u(t, \theta)$ en probabilité. La Remarque 1.2 montre que $|u(t, x)|$ est majoré par $C(1 + |x|^p)$. Par suite,

$$|u(t, \theta_n)|^2 \leq C' \left(1 + |\theta_n|^{2p}\right),$$

ce qui montre que $\left(|u(t, \theta_n)|^2\right)_n$ est une suite équi-intégrable ; donc $u(t, \theta_n)$ vers $u(t, \theta)$ en probabilité et dans L^2. Comme $u(t, \theta_n) = Y_t^{t,\theta_n}$, $\mathbb{P}$–p.s., on obtient $u(t, \theta) = Y_t^{t,\theta}$, $\mathbb{P}$–p.s. □

Corollaire 6. *Soient $t \in [0, T]$ et $\theta \in \mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$. Alors, on a, $\mathbb{P}$–p.s.,*

$$\forall s \in [t, T], \qquad Y_s^{t,\theta} = u\left(s, X_s^{t,\theta}\right).$$

Démonstration. Fixons $(t,\theta) \in [0,T] \times \mathrm{L}^{2p}(\mathcal{F}_t)$ et prenons $s \in [t,T]$. On a d'après le théorème précédent,

$$\mathbb{P}\text{–}p.s., \qquad Y_s^{s,X_s^{t,\theta}} = u(s, X_s^{t,\theta}).$$

Or $\left\{\left(Y_r^{s,X_s^{t,\theta}}, Z_r^{s,X_s^{t,\theta}}\right)\right\}_r$ est solution sur $[s,T]$ de l'EDSR

$$Y_u = g\Big(X_T^{s,X_s^{t,\theta}}\Big) + \int_u^T f\Big(r, X_r^{s,X_s^{t,\theta}}, Y_r, Z_r\Big)\, dr - \int_u^T Z_r \, dW_r, \qquad s \le u \le T.$$

Or, par unicité des solutions sur $[s,T]$ de l'EDS,

$$X_r = X_s^{t,\theta} + \int_s^r b(u, X_u)\, du + \int_s^r \sigma(u, X_u)\, dW_u$$

on obtient facilement

$$\mathbb{P}\text{–}p.s., \qquad \forall r \in [s,T], \qquad X_r^{s,X_s^{t,\theta}} = X_r^{t,\theta}.$$

Par conséquent, $\left\{\left(Y_r^{s,X_s^{t,\theta}}, Z_r^{s,X_s^{t,\theta}}\right)\right\}_r$ et $\left\{\left(Y_r^{t,\theta}, Z_r^{t,\theta}\right)\right\}_r$ sont deux solutions sur $[s,T]$ de l'EDSR

$$Y_u = g\big(X_T^{t,\theta}\big) + \int_u^T f\big(r, X_r^{t,\theta}, Y_r, Z_r\big)\, dr - \int_u^T Z_r \, dW_r, \qquad s \le u \le T.$$

L'unicité des solutions de cette EDSR donne en particulier

$$\mathbb{P}\text{–}p.s., \qquad Y_s^{t,\theta} = Y_s^{s,X_s^{t,\theta}} = u(s, X_s^{t,\theta}).$$

Ceci est valable pour tout $s \in [t,T]$; comme les deux processus $\left\{Y_s^{t,\theta}\right\}_s$ et $\left\{u(s, X_s^{t,\theta})\right\}_s$ sont continus via la continuité de u, on obtient le résultat. $\square$

Remarque. On utilise souvent ce résultat avec θ constante égale à x. Cette *propriété de Markov*, $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$, joue un rôle important lorsque l'on tente de construire la solution d'une EDP à l'aide d'une EDSR : nous le verrons plus loin.

3. Formule de Feynman-Kac

Nous finissons ce chapitre en faisant un lien entre les EDSR et les EDP. Au paragraphe précédent, nous avons vu que $Y_r^{t,x} = u(r, X_r^{t,x})$ où u est une fonction déterministe ; nous allons voir que u est solution d'une équation aux dérivées partielles – EDP. Nous notons $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel du second ordre suivant : pour h régulière

$$\begin{aligned}\mathcal{L}h(t,x) &= \frac{1}{2}\mathrm{trace}\big(\sigma\sigma^*(t,x)\mathrm{D}^2 h(t,x)\big) + b(t,x)\cdot\nabla h(t,x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \big(\sigma\sigma^*\big)_{i,j}(t,x)\, \partial_{x_i,x_j} h(t,x) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\, \partial_{x_i} h(t,x).\end{aligned}$$

En ce qui concerne les notations, si h est une fonction de t et x nous notons $\partial_t h$ ou h' la dérivée partielle en temps, ∇h le gradient en espace (vecteur colonne) et $\mathrm{D}h = (\nabla h)^*$, $\mathrm{D}^2 h$ la matrice des dérivées secondes.

Nous supposerons également que le processus Y est réel c'est à dire que $k = 1$. Z est donc une ligne de dimension d (celle du brownien). En résumé, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times d} \longrightarrow \mathbb{R}$.

L'objectif de ce paragraphe est d'établir des relations entre $\{Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\}_{0\le r\le T}$ solution de l'EDSR

$$Y_r^{t,x} = g\big(X_T^{t,x}\big) + \int_r^T f\big(u, X_u^{t,x}, Y_u^{t,x}, Z_u^{t,x}\big)\, du - \int_r^T Z_u^{t,x}\, dW_u, \qquad 0 \le r \le T, \tag{5}$$

où $\{X_r^{t,x}\}_{0\le r\le T}$ est la solution de l'EDS – avec la convention $X_r^{t,x}=x$ si $0\le r\le t$ –

$$X_r^{t,x} = x + \int_t^r b\big(u, X_u^{t,x}\big)\,du + \int_t^r \sigma\big(u, X_u^{t,x}\big)\,dW_u, \qquad t\le r\le T, \tag{6}$$

d'une part et « la solution » v de l'EDP parabolique suivante :

$$\partial_t v(t,x) + \mathcal{L}v(t,x) + f\left(t,x,v(t,x),\mathrm{D}v(t,x)\sigma(t,x)\right) = 0, \quad (t,x)\in]0,T[\times\mathbb{R}^n, \qquad v(T,\cdot)=g. \tag{7}$$

Proposition 7. *Supposons que l'EDP (7) possède une solution v, de classe $\mathcal{C}^{1,2}\big([0,T]\times\mathbb{R}^n\big)$, telle que pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, $|\nabla v(t,x)|\le C\,(1+|x|^q)$.*

Alors, pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, la solution de l'EDSR (5), $\{Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\}_{t\le r\le T}$, est donnée par le couple de processus $\big\{v\big(r,X_r^{t,x}\big), \mathrm{D}v\sigma\big(r,X_r^{t,x}\big)\big\}_{t\le r\le T}$. En particulier, on obtient la formule, $u(t,x)=Y_t^{t,x}=v(t,x)$.

Démonstration. La condition de croissance sur le gradient de v assure que $\big(\mathrm{D}v\sigma\big(r,X_r^{t,x}\big)\big)_r$ est un processus de carré intégrable. De plus, comme v est régulière, on obtient en appliquant la formule d'Itô,

$$dv\big(s,X_s^{t,x}\big) = v'\big(s,X_s^{t,x}\big)ds + \nabla v\big(s,X_s^{t,x}\big)\cdot dX_s^{t,x} + \frac{1}{2}\mathrm{trace}\big\{\sigma\sigma^*\big(s,X_s^{t,x}\big)\mathrm{D}^2 v\big(s,X_s^{t,x}\big)\big\}ds\ ;$$

soit encore, utilisant $dX_s^{t,x}$ pour $s\ge t$, et la définition de $\mathcal{L}$,

$$dv\big(s,X_s^{t,x}\big) = \big\{v'\big(s,X_s^{t,x}\big) + \mathcal{L}v\big(s,X_s^{t,x}\big)\big\}\,ds + \mathrm{D}v\sigma\big(s,X_s^{t,x}\big)dW_s.$$

Or v est solution de l'EDP (7), donc $v'+\mathcal{L}v=-f$; il vient alors

$$dv\big(s,X_s^{t,x}\big) = -f\big(s,X_s^{t,x}, v\big(s,X_s^{t,x}\big), \mathrm{D}v\sigma\big(s,X_s^{t,x}\big)\big)\,ds + \mathrm{D}v\sigma\big(s,X_s^{t,x}\big)dW_s.$$

On conclut en intégrant de r à T notant que $v\big(T,X_T^{t,x}\big)=g\big(X_T^{t,x}\big)$. □

Le résultat précédent donne une formule de représentation probabiliste pour la solution d'une EDP parabolique non-linéaire – on dit semi-linéaire car la non-linéarité n'est pas très forte –. Ce type de formules, connues sous le nom de formule de Feynman-Kac – suite aux travaux de Richard Feynman et Mark Kac – s'appliquent à l'origine à des problèmes linéaires. Nous l'obtenons comme corollaire :

Corollaire 8. *Prenons $f(t,x,y,z)=c(t,x)y+h(t,x)$, où c et h sont deux fonctions continues bornées. Sous les hypothèses précédentes, pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$,*

$$v(t,x) = \mathbb{E}\left[g\big(X_T^{t,x}\big)\exp\left(\int_t^T c(r,X_r^{t,x})\,dr\right) + \int_t^T h(r,X_r^{t,x})\exp\left(\int_t^r c(s,X_s^{t,x})\,ds\right)dr\right].$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, nous savons que $v(t,x)=Y_t^{t,x}$. Mais lorsque la fonction f prend la forme $f(t,x,y,z)=c(t,x)y+h(t,x)$, l'EDSR que l'on doit résoudre est une EDSR linéaire. On utilise alors la formule vue au cours du Chapitre 2 pour conclure. □

Remarque. Dans les deux derniers énoncés, nous avons supposé l'existence d'une solution classique v et nous en avons déduit la solution de l'EDSR et la formule $v(t,x)=Y_t^{t,x}$. Si tous les coefficients sont réguliers, on peut montrer que u qui est définie par $u(t,x)=Y_t^{t,x}$ est une fonction régulière qui est solution de l'EDP (7).

La démarche que nous avons eue précédemment consiste à étudier l'EDP, puis en déduire les solutions de l'EDSR. Mais on peut également étudier l'EDSR et en déduire la construction de la solution de l'EDP sans supposer les coefficients réguliers. Pour cela nous utiliserons la notion de solutions de viscosité des EDP dont nous rappelons rapidement la définition. Je vous renvoie au livre de Guy BARLES [Bar94] pour plus de détails.

Définition 9. Soit u une fonction continue sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition $u(T,x)=g(x)$. u est une sous-solution (resp. sursolution) de viscosité de l'EDP (7) si, pour toute fonction φ, de classe $\mathcal{C}^{1,2}\big([0,T]\times\mathbb{R}^n\big)$, on a, en tout point $(t_0,x_0)\in]0,T[\times\mathbb{R}^n$ de maximum (resp. minimum) local de $u-\varphi$:

$$\partial_t\varphi(t_0,x_0)+\mathcal{L}\varphi(t_0,x_0)+f\left(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{D}\varphi\sigma(t_0,x_0)\right)\geq 0,\qquad (\text{resp. } \leq 0).$$

u est solution de viscosité si elle est à la fois sous-solution et sursolution de viscosité.

Théorème 10. *La fonction $u(t,x):=Y_t^{t,x}$ est solution de viscosité de l'EDP (7).*

Démonstration. Remarquons que la fonction u est continue et vérifie de plus $u(T,\cdot)=g$. Nous montrons seulement que u est sous-solution (la démonstration de u sursolution est identique).

Soit donc φ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ telle que $u-\varphi$ possède en (t_0,x_0) un maximum local $(0<t_0<T)$. Quitte à remplacer φ par $\varphi-\varphi(t_0,x_0)+u(t_0,x_0)$ – opération qui n'affecte pas les dérivées de φ, on peut supposer que $\varphi(t_0,x_0)=u(t_0,x_0)$. Nous devons montrer que

$$\varphi'(t_0,x_0)+\mathcal{L}\varphi(t_0,x_0)+f\big(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{D}\varphi\sigma(t_0,x_0)\big)\geq 0.$$

Supposons le contraire i.e. il existe $\delta>0$ tel que

$$\varphi'(t_0,x_0)+\mathcal{L}\varphi(t_0,x_0)+f\big(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{D}\varphi\sigma(t_0,x_0)\big)=-\delta<0.$$

$u-\varphi$ possède un maximum local en (t_0,x_0) qui est nul donc par continuité, il existe $0<\alpha\leq T-t_0$ tel que, si $t_0\leq t\leq t_0+\alpha$ et $|x-x_0|\leq\alpha$,

$$u(t,x)\leq\varphi(t,x),\qquad \text{et},\qquad \varphi'(t,x)+\mathcal{L}\varphi(t,x)+f\big(t,x,u(t,x),\mathrm{D}\varphi\sigma(t,x)\big)\leq-\delta/2.$$

Considérons le temps d'arrêt $\tau=\inf\{u\geq t_0\ ;\ |X_u^{t_0,x_0}-x_0|>\alpha\}\wedge t_0+\alpha$. Comme X^{t_0,x_0} est un processus continu on a $|X_\tau^{t_0,x_0}-x_0|\leq\alpha$.

La formule d'Itô appliquée à $\varphi(r,X_r^{t_0,x_0})$ donne

$$d\varphi(r,X_r^{t_0,x_0})=\big\{\varphi'(r,X_r^{t_0,x_0})+\mathcal{L}\varphi(r,X_r^{t_0,x_0})\big\}\,dr+\mathrm{D}\varphi\sigma(r,X_r^{t_0,x_0})dW_r,$$

et, en intégrant de $u\wedge\tau$ à $(t_0+\alpha)\wedge\tau=\tau$ pour $t_0\leq u\leq t_0+\alpha$, on obtient

$$\varphi\big(u\wedge\tau,X_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\big)=\varphi\big(\tau,X_\tau^{t_0,x_0}\big)-\int_{u\wedge\tau}^{\tau}\{\varphi'+\mathcal{L}\varphi\}\left(r,X_r^{t_0,x_0}\right)dr-\int_{u\wedge\tau}^{\tau}\mathrm{D}\varphi\sigma\big(r,X_r^{t_0,x_0}\big)\,dW_r\ ;$$

notant, pour $t_0\leq u\leq t_0+\alpha$, $Y'_u=\varphi\big(u\wedge\tau,X_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}\big)$ et $Z'_u=\mathbf{1}_{u\leq\tau}\mathrm{D}\varphi\sigma\big(r,X_r^{t_0,x_0}\big)$, l'égalité précédente prend la forme

$$Y'_u=\varphi\big(\tau,X_\tau^{t_0,x_0}\big)+\int_u^{t_0+\alpha}-\mathbf{1}_{r\leq\tau}\{\varphi'+\mathcal{L}\varphi\}\left(r,X_r^{t_0,x_0}\right)dr-\int_u^{t_0+\alpha}Z'_r\,dW_r,\qquad t_0\leq u\leq t_0+\alpha.$$

De la même façon, si on pose, pour $t_0\leq u\leq t_0+\alpha$, $Y_u=Y_{u\wedge\tau}^{t_0,x_0}$ et $Z_u=\mathbf{1}_{u\leq\tau}Z_u^{t_0,x_0}$, on a

$$Y_u=Y_{t_0+\alpha}+\int_u^{t_0+\alpha}\mathbf{1}_{r\leq\tau}\,f\big(r,X_r^{t_0,x_0},Y_r,Z_r\big)\,dr-\int_u^{t_0+\alpha}Z_r\,dW_r,\qquad t_0\leq u\leq t_0+\alpha.$$

Or la propriété de Markov – Corollaire 6 et la remarque qui le suit – implique que, $\mathbb{P}$–p.s. pour tout $t_0 \le r \le t_0+\alpha$, $Y_r^{t_0,x_0} = u(r, X_r^{t_0,x_0})$ d'où l'on déduit que $Y_{t_0+\alpha} = Y_\tau^{t_0,x_0} = u(\tau, X_\tau^{t_0,x_0})$. L'égalité précédente devient alors

$$Y_u = u\big(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\big) + \int_u^{t_0+\alpha} \mathbf{1}_{r\le\tau}\, f\big(r, X_r^{t_0,x_0}, u\big(r, X_r^{t_0,x_0}\big), Z_r\big)\, dr - \int_u^{t_0+\alpha} Z_r\, dW_r, \quad t_0 \le u \le t_0+\alpha.$$

Nous allons appliquer le théorème de comparaison à $(Y'_u, Z'_u)_u$ et $(Y_u, Z_u)_u$ qui sont solutions d'EDSR. Par définition de τ, on a $u\big(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\big) \le \varphi\big(\tau, X_\tau^{t_0,x_0}\big)$ et

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{r\le\tau}\, f\big(r, X_r^{t_0,x_0}, u(r, X_r^{t_0,x_0}), Z'_r\big) &= \mathbf{1}_{r\le\tau}\, f\big(r, X_r^{t_0,x_0}, u(r, X_r^{t_0,x_0}), \mathrm{D}\varphi\sigma(r, X_r^{t_0,x_0})\big) \\
&\le -\mathbf{1}_{r\le\tau}\, \{\varphi' + \mathcal{L}\varphi\}\, \big(r, X_r^{t_0,x_0}\big).
\end{aligned}$$

De plus, on a, toujours par définition de τ,

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^{t_0+\alpha} -\mathbf{1}_{r\le\tau}\, (\varphi' + \mathcal{L}\varphi + f)\, \big(r, X_r^{t_0,x_0}, u(r, X_r^{t_0,x_0}), \mathrm{D}\varphi\sigma(r, X_r^{t_0,x_0})\big)\, dr\right] \ge \mathbb{E}\,[\tau - t_0]\, \delta/2.$$

Cette quantité est strictement positive : en effet, $\delta > 0$ et $\tau > t_0$ car $|X_{t_0}^{t_0,x_0} - x_0| = 0 < \alpha$. On peut donc appliquer la version stricte du théorème de comparaison, voir la remarque à la suite du Théorème 9, pour obtenir $u(t_0, x_0) = Y_{t_0} < Y'_{t_0} = \varphi(t_0, x_0)$. Ceci est impossible puisque $u(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0)$. u est donc bien une sous-solution. $\square$

Références

[Bar94] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Math. Appl., vol. 17, Springer-Verlag, Paris, 1994.