I. Rappels de calcul stochastique

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement les résultats de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite du cours. Il ne s'agit nullement de développer la théorie générale pour laquelle les ouvrages [KS91] et [RY91] sont des références remarquables. La référence [LL97] est très pédagogique ; le second paragraphe en est fortement inspiré.

1. Définitions

Ici $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet.

1.1. Généralités

Définition 1. Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$; pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.

Remarque. Dans ce cours, nous aurons $T = \mathbb{N}$ ce qui correspond aux processus à temps discret, $T = \mathbb{R}_+$ ou $T = [0, a]$ pour les processus à temps continu.

Pour simplifier les énoncés qui suivent sont donnés avec $T = \mathbb{R}_+$; pour alléger l'écriture, nous noterons un processus X plutôt que $(X_t)_{t\geq 0}$.

Définition 2. Un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire : à chaque ω, on associe la fonction $t \longmapsto X_t(\omega)$ qui est appelée trajectoire (sample path en anglais).

Définition 3. Soient X et Y deux processus. X est une modification de Y si, pour tout $t \geq 0$, les v.a. X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}$–p.s. : $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.

X et Y sont indistinguables si, $\mathbb{P}$–p.s., les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est à dire $\mathbb{P}\left(X_t = Y_t,\ \forall t \geq 0\right) = 1$.

La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.

Comme dans le cas discret, les tribus jouent un rôle très important dans l'étude des processus stochastiques car elles représentent l'information disponible et permettent de traduire les notions de passé, présent et futur.

Nous travaillerons avec une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ c'est à dire une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ i.e. pour $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. On définit alors $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_t \mathcal{F}_t\}$ ainsi que, pour tout t, $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.

Définition 4. On dit qu'une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est continue à droite si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ pour tout t.

On dit qu'elle vérifie les conditions habituelles si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$–négligeables de $\mathcal{F}$, noté $\mathcal{N}$ dans la suite.

Si l'on se donne un processus X, on introduit la filtration $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s;\ s \leq t\}$. Cette filtration s'appelle la filtration naturelle de X. Mais $\mathcal{G}_0$ ne contient pas nécessairement $\mathcal{N}$. C'est pour cela que l'on introduit souvent la *filtration naturelle augmentée* de X définie par $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t\}$. Lorsque nous parlerons de filtration naturelle il s'agira toujours de filtration naturelle augmentée.

Définition 5. Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable.

Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Remarque. Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$, et si X est adapté par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ alors toute modification de X est encore adaptée.

Définition 6. Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si l'application $(s,\omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si X est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable. Rappelons également le résultat suivant :

Proposition 7. *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Finissons ces généralités par la notion de temps d'arrêt.

Définition 8. Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–temps d'arrêt si, pour tout t, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Si τ est un temps d'arrêt, on appelle tribu des évènements antérieurs à τ la tribu définie par

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\, \forall t\}.$$

Proposition 9. *Soit τ un temps d'arrêt. Si X est progressivement mesurable, le processus arrêté X^τ – défini par $X_t^\tau = X_{\tau\wedge t}$ – est progressivement mesurable.*

1.2. Mouvement brownien

Définition 10. On appelle *mouvement brownien standard* un processus stochastique W à valeurs réelles tel que :

1. $\mathbb{P}$–p.s. $t \longmapsto W_t(\omega)$ est continue ;
2. pour $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_u,\ u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$;
3. $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$–p.s.

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi gaussienne centrée de variance t donc de densité $(2\pi t)^{-1/2} \exp\{-x^2/(2t)\}$. On dit qu'un mouvement brownien (MB dans la suite) part d'un point x si $W_0 = x$.

Remarque. On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–MB si W est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall 0 \leq s \leq t, \qquad \mathbb{E}\left(e^{iu(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-u^2(t-s)/2\right\}.$$

Proposition 11. *Soit W un MB standard.*

1. *pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de $\sigma\{W_u,\, u \leq s\}$;*
2. *$-W$ est aussi un MB ;*
3. *pour tout $c > 0$, $\{cW_{t/c^2}\}_{t\geq 0}$ est un MB ;*
4. *le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ est un MB.*

Rappelons qu'une fonction f à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}_+$ est localement hölderienne d'ordre α si, pour tout $a > 0$, il existe une constante C telle que :

$$\forall (x,y) \in [0,a]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leq C\, |x-y|^{\alpha}.$$

Théorème 12. Propriétés des trajectoires. *Si W est un MB, alors presque sûrement, on a :*

1. *$t \longmapsto W_t(\omega)$ n'est à variation finie sur aucun intervalle ;*
2. *$t \longmapsto W_t(\omega)$ est localement hölderienne d'ordre α pour tout $\alpha < 1/2$.*
3. *$t \longmapsto W_t(\omega)$ n'est dérivable en aucun point (ni localement hölderienne d'ordre $\alpha \geq 1/2$).*

Définition 13. On appelle MB standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, un vecteur $W = \left(W^1, \dots, W^d\right)$ où les W^i sont des MB réels indépendants.

Proposition 14. *Soit W un MB. La filtration $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\geq 0}$ vérifie les conditions habituelles et W est un $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\geq 0}$–MB.*

1.3. Martingales

Définition 15. Un processus X à valeurs réelles est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–martingale (respectivement une sous-martingale, resp. une surmartingale) si :

1. pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable ;
2. pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable i.e. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$;
3. pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ (resp. $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$, resp. $\leq X_s$).

Remarque. Si W est un MB, alors $\left\{W_t^2 - t\right\}_{t\geq 0}$ et $\left\{\exp\left(\sigma W_t - \sigma^2 t/2\right)\right\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.

Théorème 16. Inégalités maximales de Doob. *Soit X une martingale (ou une sous-martingale positive) continue à droite. Alors,*

1. *$\forall p \geq 1$, $\forall a > 0$, $\quad a^p\, \mathbb{P}\left(\sup_t |X_t| \geq a\right) \leq \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$;*
2. *$\forall p > 1$, $\quad \mathbb{E}\left[\sup_t |X_t|^p\right] \leq q^p \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$ où $q = p(p-1)^{-1}$.*

Théorème 17. Théorème d'arrêt de Doob. *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\sigma \leq \tau$, alors, $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ $\mathbb{P}$–p.s.*

Rappelons aussi qu'un processus X adapté et intégrable est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ, $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Pour le dernier résultat nous supposons que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ vérifie les conditions habituelles.

Théorème 18. *Soit X une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–martingale. X possède une modification càdlàg i.e. dont les trajectoires sont continues à droite et possèdent des limites à gauche.*

Indroduisons à présent une classe plus vaste de processus stochastiques : les martingales locales.

Définition 19. Soit X un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}$–p.s et, pour tout n, $X^{\tau_n}\mathbf{1}_{\tau_n>0}$ est une martingale.

Théorème 20. *Soit X une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu, $\langle X, X\rangle$, nul en 0, tel que $X^2 - \langle X, X\rangle$ soit une martingale locale.*

Remarque. Si W est un MB, on a $\langle W, W\rangle_t = t$ car $\left\{W_t^2 - t\right\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

Proposition 21. *Soit X une martingale locale continue. Il y a équivalence entre :*

1. $X_0 \in \mathrm{L}^2$ *et* $\mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty] < \infty$ *;*
2. X *est une martingale bornée dans* L^2.

Théorème 22. Inégalités de Burkholder–Davis–Gundy. *Soit $p \in]0, \infty[$. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue X, nulle en zéro,*

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right].$$

Remarque. En particulier, si $T > 0$,

$$c_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right].$$

2. Calcul d'Itô

Dans tout ce paragraphe, on se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ une filtration qui vérifie les conditions habituelles et W un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–MB (on peut prendre $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$). Les martingales seront toujours càdlàg.

2.1. Intégrale stochastique

L'objectif de ce paragraphe est de définir $\int_0^t H_s\, dW_s$. Ceci n'est pas évident car comme nous l'avons rappelé précédemment les trajectoires du MB ne sont pas à variation finie et donc l'intégrale précédente n'est en aucun cas une intégrale de Lebesgue-Stieljes.

Dans toute la suite, on fixe un réel T strictement positif. Les processus sont définis pour $t \in [0, T]$; on notera X pour $(X_t)_{t\in[0,T]}$.

Définition 1. On appelle processus élémentaire $H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :

$$H_t = \phi_0\mathbf{1}_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i\mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t),$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$, ϕ_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$–mesurable bornée et, pour $i = 1, \ldots, p$, ϕ_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$–mesurable et bornée.

Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à W comme étant le processus continu $\{I(H)_t\}_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}),$$

soit encore, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$,

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{k} \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$

On note $\int_0^t H_s\, dW_s$ pour $I(H)_t$. On obtient alors directement à l'aide de cette définition le résultat suivant :

Proposition 2. *Si H est un processus élémentaire, alors $\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–martingale continue telle que*

$$\forall t \in [0,T], \qquad \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t H_s\, dW_s\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right].$$

On veut à présent définir l'intégrale stochastique pour une classe plus vaste de processus H. Pour la première extension, on utilise la densité des processus élémentaires dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}^2$ suivant :

$$\mathcal{M}^2 = \left\{(H_t)_{0\leq t\leq T},\ \text{progressivement mesurable},\ \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right] < \infty\right\}.$$

On désigne par H^2 l'espace vectoriel des martingales bornées dans L^2 ; le sous-espace de H^2 formé par les martingales qui sont continues est noté H^2_c. On munit H^2 de la norme définie par $\|M\|_{\mathrm{H}^2} = \mathbb{E}[|M_T|^2]^{1/2}$ qui en fait un espace de Hilbert. L'inégalité de Doob montre que cette norme est équivalente à la norme $\mathbb{E}[\sup_t |M_t|^2]^{1/2}$; par suite, H^2_c est un sous-espace fermé. $\mathbb{H}^2$ et $\mathbb{H}^2_c$ désignent les sous-espaces de H^2 et H^2_c constitués des martingales nulles en 0 ; ces deux sous-espaces sont fermés.

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3. *Il existe une unique application linéaire J de $\mathcal{M}^2$ dans $\mathbb{H}^2_c$ telle que :*

1. *si H est un processus élémentaire, alors $I(H)$ et $J(H)$ sont indistinguables ;*
2. *pour tout t, $\mathbb{E}\left[J(H)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right]$.*

L'unicité signifie que si J et J' sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes alors $J(H)$ et $J'(H)$ sont indistinguables.

On note toujours $\int_0^t H_s\, dW_s$ pour $J(H)_t$.

Remarque. Notons M^2 l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2$. M^2 est un espace de Hilbert. L'intégrale stochastique est alors une isométrie de M^2 dans $\mathbb{H}^2_c$.

On obtient les propriétés suivantes :

Proposition 4. *Soit $H \in \mathcal{M}^2$. On a*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t H_s\, dW_s\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right],$$

et si τ est un temps d'arrêt,

$$\int_0^\tau H_s\, dW_s = \int_0^T \mathbf{1}_{s\leq\tau} H_s\, dW_s, \quad \mathbb{P}\text{–}p.s.$$

La dernière extension de l'intégrale stochastique dont nous aurons besoin consiste à relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur H. On introduit pour cela

$$\mathcal{M}^2_{\text{loc}} = \left\{ (H_t)_{0 \le t \le T}, \text{ progressivement mesurable, } \int_0^T H_s^2 \, ds < \infty \ \mathbb{P}\text{–p.s.} \right\}.$$

et on a le résultat suivant :

Proposition 5. *Il existe une unique application linéaire J' de $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ dans l'ensemble des martingales locales continues telle que :*

1. *si H est un processus élémentaire alors $J'(H)$ et $I(H)$ sont indistinguables ;*
2. *si $(H_n)_n$ est une suite de processus de $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ telle que $\int_0^T H_s^{n2} \, ds$ tend vers 0 en probabilité alors $\sup_{0 \le t \le T} |J'(H^n)_t|$ tend vers 0 en probabilité.*

On note encore $\int_0^t H_s \, dW_s$ pour $J'(H)_t$.

Remarque. Attention, lorsque $H \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$, $\left(\int_0^t H_s \, dW_s \right)_{0 \le t \le T}$ est seulement une martingale locale et pas nécessairement une martingale.

Proposition 6. *Pour $H \in \mathcal{M}^2_{\text{loc}}$, $\langle \int_0^{\cdot} H_s \, dW_s \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds$.*

2.2. Processus d'Itô

Nous introduisons à présent une classe de processus qui sera très utile dans la suite.

Définition 7. On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :

$$\mathbb{P}\text{–p.s.} \qquad \forall 0 \le t \le T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dW_s,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$–mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}$–p.s. :

$$\int_0^T |K_s| \, ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T |H_s|^2 \, ds < \infty.$$

On peut montrer que si un processus d'Itô est une martingale locale continue alors $K_t = 0$ $m \otimes \mathbb{P}$–p.p. On en déduit alors que la décomposition d'un processus d'Itô est unique au sens où si

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dW_s = X_0' + \int_0^t K_s' \, ds + \int_0^t H_s' \, dW_s$$

alors $X_0 = X_0'$ $\mathbb{P}$–p.s. et $H_t' = H_t$, $K_t = K_t'$ $m \otimes \mathbb{P}$–p.p.

Si X et Y sont deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dW_s \quad \text{et} \quad Y_t = X_0' + \int_0^t K_s' \, ds + \int_0^t H_s' \, dW_s$$

on pose $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H_s' \, ds$ et $dX_t = K_t \, dt + H_t \, dW_t$. On a alors la

Proposition 8. Formule d'intégration par parties. *Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

Théorème 9. FORMULE D'ITÔ. *Soient $(t,x) \longmapsto f(t,x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus de Itô. On a :*

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f'_s(s,X_s)\,ds + \int_0^t f'_x(s,X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X_s)\,d\langle X,X\rangle_s.$$

Nous finissons ce paragraphe en étendant la formule précédente au cas d'un mouvement brownien d–dimensionnel et d'un processus d'Itô n–dimensionnel. Les hypothèses sur les coefficients sont celles de la Définition 7.

Théorème 10. *Soit X un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: pour $i = 1,\dots,n$,*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i\,ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{i,k}\,dW_s^k.$$

Si f est deux fois différentiable en x et une fois en t on a :

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \partial_s f(s,X_s)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_{x_i} f(s,X_s)\,dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \partial^2_{x_i,x_j} f(s,X_s)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s, \end{aligned}$$

avec $dX_s^i = K_s^i\,ds + \sum_{k=1}^d H_s^{i,k}\,dW_s^k$ et $d\langle X^i,X^j\rangle_s = \sum_{k=1}^d H_s^{i,k}H_s^{j,k}\,ds$.

Le résultat est plus simple à retenir sous forme vectorielle. Pour cela, on note X le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées X^i, K le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées K^i et W le vecteur de $\mathbb{R}^d$ de coordonnée W^j. On introduit alors la matrice de taille $n \times d$, $H = (H^{i,j})_{1\le i\le n,\,1\le j\le d}$. Avec ces notations, on a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\,ds + \int_0^t H_s\,dW_s,$$

où $H_s\,dW_s$ est un produit matrice–vecteur colonne. La formule d'Itô s'écrit sous la forme, notant $x \cdot y$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et H^* la transposée de H

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \partial_s f(s,X_s)\,ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s)\cdot dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{trace}\left(\mathrm{D}^2 f(s,X_s)H_sH_s^*\right)ds,$$

soit encore

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \left(\partial_s f(s,X_s) + \nabla f(s,X_s)\cdot K_s\right)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{trace}\left(\mathrm{D}^2 f(s,X_s)H_sH_s^*\right)ds + \int_0^t \mathrm{D}f(s,X_s)H_s\,dW_s. \end{aligned}$$

3. Résultats importants

3.1. Représentation des martingales browniennes

Rappelons tout d'abord la caractérisation du mouvement brownien en termes de martingales due à Paul LÉVY.

Théorème 1. *Soit X une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$–martingale locale continue, nulle en 0. On suppose que, pour tout $i,j \in \{1,\dots,d\}$, $\langle X^i,X^j\rangle_t = \delta_{i,j}\,t$. Alors X est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$–mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Plaçons-nous sur $[0,T]$ et remarquons que X est une martingale de carré intégrable si la condition de crochet est satisfaite. Nous devons montrer que

$$\forall 0 \leq s \leq t \leq T, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d, \qquad \mathbb{E}\left(e^{iu\cdot(X_t - X_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-|u|^2(t-s)/2\right\}.$$

Appliquons la formule d'Itô à la fonction $x \longmapsto e^{iu\cdot x}$ entre s et t pour obtenir

$$e^{iu\cdot X_t} = e^{iu\cdot X_s} + \int_s^t ie^{iu\cdot X_r} u \cdot dX_r - \frac{|u|^2}{2}\int_s^t e^{iu\cdot X_r}\, dr.$$

Comme X est une martingale de carré intégrable, l'intégrale stochastique précédente est une martingale ; si on multiplie l'égalité par $e^{-iu\cdot X_s}\mathbf{1}_A$ où $A \in \mathcal{F}_s$, on obtient en prenant l'espérance,

$$\mathbb{E}\left[e^{iu\cdot(X_t - X_s)}\mathbf{1}_A\right] = \mathbb{P}(A) - \frac{|u|^2}{2}\int_s^t \mathbb{E}\left[e^{iu\cdot(X_r - X_s)}\mathbf{1}_A\right] dr,$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left[e^{iu\cdot(X_t - X_s)}\mathbf{1}_A\right] = \mathbb{P}(A)\exp\left\{-|u|^2(t-s)/2\right\},$$

ce qui conclut la preuve de ce résultat. □

Nous allons utiliser cette caractérisation du mouvement brownien pour démontrer que toute martingale dans la filtration brownienne est une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien. Insistons lourdement sur le fait que nous travaillons avec la filtration naturelle du mouvement brownien W et reprenons la notation $\mathcal{F}_t^W$ pour ne pas l'oublier.

Théorème 2. *Soit M une $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\in[0,T]}$–martingale (càdlàg) de carré intégrable. Alors il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$, appartenant à $\mathrm{M}^2(\mathbb{R}^k)$, tel que*

$$\mathbb{P}\text{–}p.s. \qquad \forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s \cdot dW_s.$$

Il est important de remarquer que ce résultat implique que, dans la filtration brownienne, les martingales sont continues.

Démonstration. Nous nous plaçons en dimension un pour simplifier l'écriture. Rappelons que H^2 est l'espace des martingales de carré intégrable, H^2_c le sous-espace formé des martingales continues. La norme utilisée est $\|M\|^2 = \mathbb{E}\left[M_T^2\right]$ qui fait des deux espaces précédents deux espaces de Hilbert. $\mathbb{H}^2$ et $\mathbb{H}^2_c$ sont les sous-espaces de H^2 et H^2_c formés par les martingales nulles en 0. On note J l'application intégrale stochastique : $J : \mathrm{M}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2_c$.

On doit montrer que $\mathbb{H}^2 = J\left(\mathrm{M}^2\right)$. Pour cela remarquons tout d'abord que si $M \in \mathbb{H}^2$ il existe un unique couple de martingales (X,Y) tel que $M = X + Y$ avec $X \in J\left(\mathrm{M}^2\right)$ et $Y \in \mathbb{H}^2$ vérifiant $\langle Y, W\rangle = 0$. Cette dernière condition signifie que XY est une martingale pour toute $X \in J\left(\mathrm{M}^2\right)$. L'unicité est évidente. Pour l'existence, notons que $J\left(\mathrm{M}^2\right)_T$ l'ensemble des conditions terminales des intégrales browniennes, est un fermé de $\mathrm{L}^2\left(\mathcal{F}_T^W\right)$. Soit F l'orthogonal. On considère la décomposition orthogonale $M_T = X_T + Y_T$ et on définit $Y_t = \mathbb{E}\left(Y_T \mid \mathcal{F}_t^W\right)$. On doit montrer que le crochet de Y et W est nul ce qui revient à montrer que YW est une martingale. Si τ est un temps d'arrêt,

$$\mathbb{E}[Y_\tau W_\tau] = \mathbb{E}\left[W_\tau \mathbb{E}\left(Y_T \mid \mathcal{F}_\tau^W\right)\right] = \mathbb{E}\left[W_\tau Y_T\right] = \mathbb{E}\left[W_T^\tau Y_T\right];$$

la dernière espérance est nulle car W^τ appartient à $J\left(\mathrm{M}^2\right)$ et donc Y est orthogonale à W.

Comme $J\left(\mathrm{M}^2\right)$ est fermé il suffit de démontrer que $G \subset J\left(\mathrm{M}^2\right)$ pour un sous-ensemble dense de $\mathbb{H}^2$. Les martingales bornées sont denses. Mais on peut remarquer que les martingales bornées telles que Y est également bornée sont denses. En effet, si M est une martingale bornée, notons (X, Y) sa décomposition. On introduit la suite de temps d'arrêt $\sigma_n = \inf\{t,\ |X_t| \geq n\}$. Comme X est continue, X^{σ_n} et par suite $Y^{\sigma_n} = M^{\sigma_n} - X^{\sigma_n}$ sont des martingales bornées. On a bien évidemment $M_T^{\sigma_n} \longrightarrow M_T$ dans L^2. Montrons que la décomposition de M^{σ_n} est $(X^{\sigma_n}, Y^{\sigma_n})$. Il s'agit de montrer que W est orthogonal à Y^{σ_n} puisque X^{σ_n} s'écrit comme une intégrale stochastique. Or $\langle Y^{\sigma_n}, W\rangle = \langle Y, W\rangle^{\sigma_n}$ ce qui donne le résultat.

On suppose donc que X, Y, et M sont bornées par α. Soit $D = 1 + Y_T/(2\alpha)$. On a $D \geq 1/2$ et $\mathbb{E}[D] = 1$. On considère $\mathbb{P}^*$ la probabilité sur $\mathcal{F}_T^W$ de densité D par rapport à $\mathbb{P}$. Soit $X \in J\left(\mathrm{M}^2\right)$; montrons que X est une $\mathbb{P}^*$–martingale. Soit donc τ un temps d'arrêt. On a, comme $\mathbb{E}[X_\tau] = 0$,

$$\mathbb{E}^*[X_\tau] = \mathbb{E}[DX_\tau] = \mathbb{E}[Y_T X_\tau]/(2\alpha) = \mathbb{E}[Y_\tau X_\tau]/(2\alpha) = \langle Y, X\rangle_\tau/(2\alpha) = 0,$$

ce qui montre que X est une $\mathbb{P}^*$–martingale. Comme $W_t^2 - t = 2\int_0^t W_r\, dW_r$, le calcul précédent montre que W_t et $W_t^2 - t$ sont des $\mathbb{P}^*$–martingales continues. Donc d'après le théorème de Paul Lévy, sous $\mathbb{P}$ comme sous $\mathbb{P}^*$, W est un mouvement brownien. Comme D est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T^W$, on en déduit que $D = 1$ ce qui donne $Y_T = 0$ et donc $Y = 0$. □

On déduit de ce résultat que si ξ est une variable aléatoire de carré intégrable, $\mathcal{F}_T^W$–mesurable, il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]} \in \mathrm{M}^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\xi = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T H_s \cdot dW_s.$$

3.2. Théorème de Girsanov

Théorème 3. *Soit $(h_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $\mathbb{P}$–p.s. $\int_0^T |h_s|^2\, ds < +\infty$. On suppose que le processus $(D_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par*

$$D_t = \exp\left\{\int_0^t h_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2\, ds\right\}$$

est une martingale. Soit $\mathbb{P}^*$ la mesure de densité D_T par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$. Introduisons le processus $B_t = W_t - \int_0^t h_s\, ds$. Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, B est un mouvement brownien standard.

Remarque. Lorsque $\mathbb{E}\left[\exp\left\{1/2\int_0^T |h_s|^2\, ds\right\}\right] < +\infty$, D est une martingale. Ce critère est connu sous le nom de condition de Novikov.

3.3. Critère de Kolmogorov

Nous finissons ce chapitre préliminaire par le critère de Kolmogorov. Fixons quelques notations. Soit X un processus à valeurs dans un espace de Banach indicé par un paramètre d–dimensionnel. On note $\|\cdot\|$ la norme de l'espace de Banach et $|\cdot|$ celle de $\mathbb{R}^d$. Rappelons qu'une fonction f à valeurs dans un Banach et définie sur $\mathbb{R}^d$ est localement hölderienne d'ordre α si, pour tout $a > 0$, il existe une constante C telle que :

$$\forall |x|, |y| \leq a, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq C\,|x-y|^\alpha.$$

Théorème 4. Critère de Kolmogorov. *Soit $(X_t)_{t\in[0,1]^d}$ un processus à valeurs dans un Banach. Supposons qu'il existe trois constantes strictement positives, γ, ε, C, telles que :*

$$\forall s,t \in [0,1]^d, \qquad \mathbb{E}\left[\|X_t - X_s\|^\gamma\right] \leq C\,|t-s|^{d+\varepsilon}.$$

Alors il existe une modification Y de X telle que

$$\forall \alpha \in [0,\varepsilon/\gamma[, \qquad \mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\neq t}\|Y_t - Y_s\|/|t-s|^\alpha\right)^\gamma\right] < +\infty.$$

En particulier, les trajectoires de Y sont hölderiennes d'ordre α.

Remarque. Notons que $[0,1]^d$ n'est pas fondamental. Si $d=2$, on peut avoir par exemple $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, mais les trajectoires de Y sont alors localement hölderiennes.

Références

[KS91] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, 2nd ed., Grad. Texts in Math., vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991.

[LL97] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, second ed., Ellipses Édition Marketing, Paris, 1997.

[RY91] D. Revuz and M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 293, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.