Le modèle de Black–Scholes

Philippe BRIAND, Mars 2003

1. Présentation du modèle

Les mathématiciens ont depuis longtemps essayé de résoudre les questions soulevées par le monde de la finance. Une des caractéristiques de ces questions – il suffit de penser à la bourse pour s'en convaincre – est qu'elles font apparaître des dynamiques d'apparence désordonnées et c'est pourquoi les modèles probabilistes semblent relativement bien adaptés à cette situation. En 1901, la thèse de Louis BACHELIER, *Théorie de la spéculation*, portait déjà sur ce thème. Depuis de nombreux probabilistes se sont penchés sur ces questions rafinant sans cesse les modèles utilisés. Je vous renvoie par exemple à [DJP98, LL97, Kar97, KS98, MR97]. Mais c'est sans nul doute grace aux travaux de BLACK, MERTON et SCHOLES que ces questions sont devenues si populaires en partie à cause de la simplicité des réponses qu'ils ont apportées.

En 1973, BLACK et SCHOLES ont proposé une formule, qui porte aujourd'hui leurs noms, pour le prix d'une option européenne d'achat. Cette formule est très utilisée en pratique à tel point que la volatilité implicite qu'elle définit est devenue une véritable unité de mesure. Le modèle mathématique qui décrit le marché financier est à la fois simple et efficace.

Finissons cette courte introduction en mentionnant que MERTON et SCHOLES (BLACK était décédé) ont obtenu le prix Nobel d'économie pour leurs travaux en finance.

De quoi s'agit-il ?

Le modèle de Black–Scholes est, à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué, l'autre pas. Typiquement, l'actif risqué est une action (l'action sous-jacente à l'option) tandis que l'actif non risqué s'apparente à une obligation. À l'instant t, le prix de l'obligation est R_t et le prix de l'action est S_t. L'évolution de l'obligation est relativement simple puisque l'on suppose que

$$dR_t = r_t R_t\, dt, \qquad \text{soit} \quad R_t = R_0 e^{\int_0^t r_s ds},$$

où $r_t \geq 0$ représente le taux d'intérêt instantanné. Nous supposerons toujours que $R_0 = 1$.

Le prix de l'action, $\{S_t\}_{t\geq 0}$, est régi par l'équation différentielle stochastique (EDS en abrégé)

$$dS_t = S_t(\mu_t\, dt + \sigma_t\, dW_t), \qquad S_0 > 0 \text{ donné},$$

où μ_t est un paramètre réel, et $\sigma_t \geq 0$; le paramètre σ s'appelle la volatilité. Bien évidemment $\{W_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et nous notons $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle augmentée. En ce qui concerne les hypothèses, nous supposerons dans la suite que les processus r, μ et σ sont progressivement mesurables et que, pour tout $T > 0$,

$$\mathbb{P} - p.s., \qquad \int_0^T \left\{ r_t + |\mu_t| + \sigma_t^2 \right\} dt < +\infty.$$

En outre, nous supposons également le processus σ borné.

On obtient facilement à l'aide de la formule d'Itô,

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \sigma_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds) \right\} \exp\left\{ \int_0^t \mu_s\, ds \right\}.$$

Dans le modèle de Black–Scholes originel, les paramètres r, μ et σ sont des constantes. On a dans ce cas

$$R_t = e^{rt}, \qquad S_t = S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t} e^{\mu t}.$$

Considérons un agent qui investit dans ce marché. Désignons par ϕ_t et ψ_t les nombres respectifs d'obligations et d'actions détenues par l'agent à l'instant t. La valeur du portefeuille de cet investisseur est

$$V_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t.$$

On suppose que le processus (ϕ, ψ) est progressivement mesurable. Le fait que (ϕ_t, ψ_t) soit adapté signifie que l'agent, pour déterminer la stratégie qu'il va adopter, n'anticipe pas sur le futur : il ne dispose que de l'information jusqu'à l'instant t qui est véhiculée par $\mathcal{F}_t$; cela proscrit en particulier les délits d'initiés. Signalons d'autre part que dans ce modèle ϕ_t et ψ_t sont des réels ; lorsqu'ils sont négatifs, l'agent contracte une dette libéllée dans l'actif correspondant.

Un tel couple de processus s'appelle une stratégie de financement. En fait, nous ne considèrerons que des stratégies auto-financées c'est à dire pour lesquelles nous avons :

$$dV_t = \phi_t \, dR_t + \psi_t \, dS_t.$$

La signification de l'auto-financement est la suivante : à l'instant $t = 0$, l'agent investit la somme V_0 dans le marché puis au cours du temps, il fait évoluer la répartition des titres dans son portefeuille. Il n'y a ni apport de fonds ni retrait d'argent pour consommation.

L'équation d'auto-financement nécessite une petite hypothèse technique. En résumé pour notre modèle

Définition. Une stratégie auto-financée est un couple de processus (ϕ, ψ) progressivement mesurables vérifiant $\mathbb{P}$–p.s.

$$\int_0^T \left\{ r_t |\phi_t| + \sigma_t^2 \psi_t^2 \right\} dt < +\infty$$

et tel que le processus $V_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t$ satisfait

$$dV_t = \phi_t \, dR_t + \psi_t \, dS_t, \quad t \geq 0.$$

On utilise la notation suivante : si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est un processus adapté, on note $X^a(t)$ la valeur de X_t actualisée soit $X^a(t) = X_t / R_t$. On note a_t le coefficient d'actualisation à l'instant t soit $a_t = 1/R_t$. La formule d'intégration par parties donne

$$dV^a(t) = -r_t V^a(t) \, dt + a_t \, dV_t, \qquad dS^a(t) = -r_t S^a(t) \, dt + a_t \, dS_t = -r_t a_t S_t \, dt + a_t \, dS_t.$$

On a alors, comme $V_t = \psi_t S_t + \phi_t R_t$,

$$\psi_t \, dS^a(t) = -r_t a_t (V_t - \phi_t R_t) \, dt + a_t \psi_t \, dS_t = -r_t V^a(t) \, dt + a_t (\phi_t \, dR_t + \psi_t \, dS_t).$$

On en déduit immédiatement le

Lemme. *Soit (ϕ, ψ) une stratégie. (ϕ, ψ) est autofinancée si et seulement si $dV^a(t) = \psi_t \, dS^a(t)$.*

Ce petit lemme possède une conséquence importante : une stratégie autofinancée est entièrement caractérisée par la valeur initiale du portefeuille V_0 et le processus ψ_t. En effet, une stratégie est autofinancée si et seulement si

$$V^a(t) = V^a(0) + \int_0^t \psi_u \, dS^a(u) = V_0 + \int_0^t \psi_u \, dS^a(u). \tag{af}$$

On obtient alors ϕ_t via la relation $\phi_t = V^a(t) - \psi_t S^a(t) = V_0 + \int_0^t \psi_u \, dS^a(u) - \psi_t S^a(t)$.

En vertu de ce lemme, une stratégie autofinancée sera désignée par le couple (x, ψ), x représentant la valeur initiale du portefeuille associée via la relation (af). Si besoin, nous noterons $V_t^{x,\psi}$ la valeur du portefeuille corespondant à la stratégie autofinancée (x, ψ) mais la plupart du temps la référence à (x, ψ) sera omise.

Définition. Une stratégie autofinancée, (x, ψ), est dite admissible si pour tout $t \geq 0$, $V_t^{x,\psi} \geq 0$.

Elle est dite minorée, s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\forall t \geq 0, \qquad V^a(t) \geq -c.$$

Pour une stratégie admissible la valeur du portefeuille doit toujours être positive : aucune dette, même temporaire, n'est tolérée. Dans le second, les dettes sont tolérées dans une certaine mesure mais ne doivent pas dépasser un certain seuil.

2. Opportunité d'arbitrage

Une opportunité d'arbitrage ou plus simplement un arbitrage est un moyen de gagner de l'argent sans prendre aucun risque en particulier sans mise initiale. Cela se traduit par le définition suivante lorsqu'on suppose que l'investisseur intervient durant la période $[0, T]$.

Définition. Une opportunité d'arbitrage est une stratégie minorée telle que

$$V_0 = 0, \qquad \mathbb{P}(V_T \geq 0) = 1, \qquad \mathbb{P}(V_T > 0) > 0.$$

La première condition signifie que l'on part de rien, la seconde que l'on est sûr de ne pas perdre d'argent et la troisième qu'avec une probabilité strictement positive on fait un réel profit.

On imagine sans peine que les gens qui tentent de réguler le marché cherchent à tout prix à proscrire les opportunités d'arbitrage. En effet, si de telles opportunités sont admises le marché ne tarde pas à « exploser ». Une hypothèse communément faite est donc celle d'absence d'opportunité d'arrbitrage désigné par (AOA) dans la suite.

Dans le modèle de Black-Scholes, nous avons

$$dS^a(t) = S^a(t)\big\{(\mu_t - r_t)\, dt + \sigma_t \, dW_t\big\}.$$

Introduisons le processus $\psi_t = \operatorname{sgn}(\mu_t - r_t)\, \mathbf{1}_{\sigma_t = 0}$. La stratégie autofinancée associée à $(0, \psi)$ vérifie

$$V^a(t) = \int_0^t \psi_u \, dS^a(u) = \int_0^t |\mu_u - r_u| \mathbf{1}_{\sigma_u = 0} du.$$

Sous (AOA), c'est à dire en l'absence d'opportunité d'abitrage, on doit avoir $|\mu_u - r_u| \mathbf{1}_{\sigma_u = 0} = 0$ $m \otimes \mathbb{P}$–p.p. car sinon la stratégie précédente est clairement un arbitrage et donc il existe un processus θ progressivement mesurable tel que

$$\sigma_t \theta_t = \mu_t - r_t \ ;$$

on peut prendre par exemple

$$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \mathbf{1}_{\sigma_t \neq 0}$$

puisque si $\sigma_t = 0$ alors $\mu_t - r_t = 0$.

La question qui se pose alors est : cette condition est-elle suffisante ?

Pour les modèles financiers « discrets », il y a un résultat très important qui dit que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalente à l'existence d'une probabilité risque neutre. Rappelons qu'une probabilité risque neutre est une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}_T$ et telle que $\{S^a(t),\, 0 \leq t \leq T\}$ est une $\mathbb{P}^*$–martingale.

Ce résultat est-il encore vrai pour les « modèles continus » ? Comme nous allons le voir, l'existence d'une proba risque neutre entraîne toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage mais la réciproque est fausse. Il faut renforcer l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage pour pavenir à construire une probabilité risque neutre. Je vous renvoie aux travaux de F. Delbaen et W. Schachermayer [DS94, DS98]. Contentons-nous de prouver la première implication et d'essayer de percevoir la difficulté de la seconde.

Supposons donc l'existence d'une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$. Si on considère une stratégie minorée ψ telle que $V_0 = 0$. On a $V^a(t) = \int_0^t \psi_u\, dS^a(u)$; sous $\mathbb{P}^*$, S^a est une martingale et donc V^a est une martingale locale comme intégrale stochastique par rapport à une martingale. De plus, $V^a(t)$ reste minorée par une constante. Or une martingale locale minorée est une surmartingale (c'est une conséquence du lemme de Fatou voir l'annexe). Par suite, nous avons

$$\mathbb{E}^*\big[V^a(T)\big] \leq \mathbb{E}^*\big[V^a(0)\big] = V_0 = 0.$$

Pour un arbitrage, on a $V^a(T) \geq 0$ $\mathbb{P}$ (ou $\mathbb{P}^*$ c'est pareil) p.s. et donc $\mathbb{E}^*\big[V^a(T)\big] = 0$ puis $V^a(T) = 0$ $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$ p.s. Ceci contredit le fait que $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$. Il n'y a donc pas d'arbitrage.

Remarque. Notons que l'argument repose de façon essentielle sur la minoration. Dans le modèle de Black–Scholes le plus simple, c'est à dire lorsque les coefficients sont constant, si on s'autorise toutes les stratégies autofinancées, il existe des opportunités d'arbitrage. Cela repose sur un résultat de R. M. Dudley [Dud77] qui permet de construire un processus $\{h_t\}_t$ adapté tel que

$$\int_0^T h_r\, dW_r = 1, \qquad \text{et} \qquad 0 < \int_0^T h_r^2\, dr < +\infty, \quad \mathbb{P}\text{–p.s.}$$

On se place alors dans le cas $r = \mu = 0$, $S_0 = R_0 = \sigma = 1$, soit $R_t = 1$ et $dS_t = S_t\, dW_t$ i.e. $S_t = \exp\{W_t - t^2/2\}$. On définit $V_t = \int_0^t h_r\, dW_r$ et $\psi_t = h_t/S_t$. $(0, \psi)$ est une opportunité d'arbitrage. En effet, $V_0 = 0$ et $V_T = \int_0^T h_r\, dW_r = 1$.

Bien évidemment cette stratégie n'est pas minorée.

Essayons de percevoir la difficulté de l'implication réciproque. Soit $\mathbb{P}^*$ une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ et donc sur $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0, T]$. Si on note D_t la densité de $\mathbb{P}^*$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$, D est une $\mathbb{P}$–martingale strictement positive. Il existe donc un processus $\{h_t\}_{t \in [0,T]}$ progressivement mesurable tel que

$$\int_0^T h_s^2\, ds < +\infty, \qquad D_t = \exp\left\{\int_0^t h_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2\, ds\right\}.$$

Je vous renvoie à l'annexe pour les détails.

D'après le théorème de Girsanov, le processus $B_t = W_t - \int_0^t h_s\, ds$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$. D'autre part, nous avons

$$dS^a(t) = S^a(t)\big\{(\mu_t - r_t)\, dt + \sigma_t\, dW_t\big\} = S^a(t)\big\{(\mu_t - r_t + \sigma_t h_t)\, dt + \sigma_t\, dB_t\big\}.$$

Si donc $\mathbb{P}^*$ est une probabilité risque neutre, S^a est une $\mathbb{P}^*$ martingale, et l'unicité de la décomposition des processus d'Itô, donne

$$\mu_t - r_t + \sigma_t h_t.$$

C'est précisément ce que fournit l'absence d'opportunité d'arbitrage : un processus θ tel que $\sigma_t\theta_t = \mu_t - r_t$. Mais en suposant que $\sigma_t > 0$, on a nécessairement $\theta_t = -h_t = (\mu_t - r_t)/\sigma_t$ et l'absence d'opportunité d'arbitrage ne donne pas d'information sur ce dernier processus. Or notre hypothèse de départ, $\mathbb{P}^*$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, donne D martingale ce qui est équivalent à

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^T h_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T h_s^2\, ds\right\}\right] = 1,$$

puisqu'une surmartingale d'espérance constante est une martingale.

Dans le modèle de Black-Scholes, nous venons de voir qu'il existe une probabilité risque neutre si et seulement si il existe un processus progressivement mesurable θ tel que

$$\mu_t - r_t = \sigma_t\theta_t, \qquad \int_0^T \theta_s^2\, ds < +\infty, \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\int_0^T \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds\right\}\right] = 1.$$

Dans ce cas, si $\mathbb{P}^*$, est la mesure de densité par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ définie par le processus θ,

$$dS^a(t) = S^a(t)\sigma_t\, dB_t, \quad \text{i.e.} \quad S^a(t) = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2\, ds\right\},$$

où $B_t = W_t + \int_0^t \theta_s\, ds$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$.

En particulier, dans le modèle de Black–Scholes à coefficients constants, il existe une unique probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$ de densité par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$, notant θ la constante $(\mu - r)/\sigma$,

$$\exp\left(\theta W_T - \frac{\theta^2 T}{2}\right).$$

3. Complétude du marché

Commençons par l'exemple le plus connu d'option européenne, celui d'une option européenne d'achat ou « call européen ». Il s'agit d'un titre qui donne le droit mais non l'obligation à son détenteur d'acheter à une date T fixée par avance une action S à un prix K fixé par avance. T s'appelle la maturité et K le prix d'exercice. À la date T, ou bien $S_T \geq K$ ou bien $S_T < K$. Dans le premier cas, le détenteur de l'option exerce son droit : il achète une action au prix K ; il peut revendre instantanément cette action au prix S_T réalisant ainsi un bénéfice de $S_T - K$ à la date T. Dans le second cas, le détenteur de l'option n'exercera pas son droit : il ne vas pas acheter au prix K une action qu'il peut acheter moins cher sur le marché. Il ne fait aucun bénéfice. Finalement, le gain que procure la détention d'un call européen est $\xi = (S_T - K)^+$. On parle souvent de « payoff ». Toute option européenne sera représenté par le gain que procure à maturité sa détention.

Définition. On appelle option européenne de maturité T toute variable aléatoire positive et $\mathcal{F}_T$–mesurable.

Nous supposons à présent qu'il existe une probabilité risque neutre, $\mathbb{P}^*$ et nous travaillons à maturité fixée $T > 0$.

Nous introduisons deux notions importantes.

Définition. Une option européenne est régulière – on devrait dire $\mathbb{P}^*$–régulière – si la variable aléatoire $\xi^a := a_T\xi$ est $\mathbb{P}^*$–intégrable i.e. $\mathbb{E}^*[\xi^a] < +\infty$.

Une option régulière est simulable ou duplicable s'il existe une stratégie autofinancée (x, ψ) telle que

$$V_T = \xi, \qquad V^a \text{ est une } \mathbb{P}^*\text{–martingale.}$$

Le marché est complet (plus précisément $\mathbb{P}^*$–complet) si toute option régulière est simulable.

Notons tout d'abord qu'une option régulière est simulable si et seulement si il existe une stratégie minorée telle

$$V_0 = \mathbb{E}^*\big[\xi^a\big], \qquad V_T = \xi.$$

En effet, si ξ est simulable alors il existe une stratégie autofinancée telle que V^a est une $\mathbb{P}^*$–martingale et $V^a(T) = \xi^a$, donc

$$V^a(t) = \mathbb{E}^*\big(V^a(T) \,\big|\, \mathcal{F}_t\big) = \mathbb{E}^*\big(\xi^a \,\big|\, \mathcal{F}_t\big).$$

En particulier, puisque $\xi \geq 0$, il en est de même de $V^a(T)$ et $V^a(0) = \mathbb{E}^*[\xi^a]$.

Réciproquement, si (x, ψ) est une stratégie minorée, V^a est sous $\mathbb{P}^*$ une martingale locale minorée donc une surmartingale. On a donc pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}^*\big[V^a(T)\big] \leq \mathbb{E}^*\big[V^a(t)\big] \leq \mathbb{E}^*\big[V^a(0)\big].$$

Si $V^a(0) = V_0 = \mathbb{E}^*[\xi^a]$ et $V^a(T) = \xi^a$ alors pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}^*[V^a(t)] = \mathbb{E}^*[\xi^a]$ et V^a est alors une $\mathbb{P}^*$–martingale, une surmartingale d'espérance constante étant une martingale.

Comme dans les modèles discrets, nous avons le résultat général suivant : s'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, le marché est $\mathbb{P}^*$–complet si et seulement si $\mathbb{P}^*$ est l'unique probabilité risque neutre. Je vous renvoie à l'article de J. Harrison et R. Pliska [HP83]. Dans le modèle de Black–Scholes, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème. *On se place dans le modèle de Black–Scholes et on suppose l'existence d'une probabilité risque neutre.*

Le marché est complet si et seulement si $\sigma_t > 0$ $m \otimes \mathbb{P}$–p.p.

Démonstration. Nous supposons l'existence d'une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$. Notons D_t la densité de $\mathbb{P}^*$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$; D est une $\mathbb{P}$–martingale et il existe donc un processus θ progressivement mesurable tel que $\sigma_t \theta_t = \mu_t - r_t$, $\int_0^T \theta_s^2\, ds < +\infty$ et

$$D_t = \exp\left(- \int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 \, ds \right).$$

Le processus $B_t = W_t + \int_0^t \theta_s \, ds$ est sous $\mathbb{P}^*$ un mouvement brownien et $dS^a(t) = S^a(t)\sigma_t dB_t$.

Supposons dans un premier temps le marché complet. Considédons la variable aléatoire $\mathcal{F}_T$–mesurable

$$\xi = R_T \left(1 + \int_0^T \mathbf{1}_{\sigma_t = 0} \, dB_t \right), \qquad \text{soit} \quad \xi^a = 1 + \int_0^T \mathbf{1}_{\sigma_t = 0} \, dB_t.$$

ξ^a est clairement intégrable par rapport à $\mathbb{P}^*$ et $\mathbb{E}^*\big[\xi^a\big] = 1$. Par hypothèse, ξ^+ et ξ^- sont simulables. Il existe donc deux processus progressivement mesurable ψ^+ et ψ^- tels que

$$M_t^{\pm} := \mathbb{E}^*\left[\xi^{a\pm}\right] + \int_0^t \psi_u^{\pm} \, dS^a(u) \quad \mathbb{P}^*\text{–martingale vérifiant} \quad M_T^{\pm} = \xi^{a\pm}.$$

Posons $\psi = \psi^+ - \psi^-$ et $M = M^+ - M^-$. M est une $\mathbb{P}^*$–martingale et par suite il en est de même de $X_t := M_t - 1 - \int_0^t 1_{\sigma_s=0}\, dB_s$ qui, par construction, vérifie $X_T = \xi^a - \xi^a = 0$. Donc, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$X_t = \mathbb{E}^*\left[\xi^a\right] + \int_0^t \psi_u S^a(u)\sigma_u\, dB_u - 1 - \int_0^t \mathbf{1}_{\sigma_u=0}\, dB_u = \int_0^t \big(\psi_u S^a(u)\sigma_u - \mathbf{1}_{\sigma_u=0}\big)\, dB_u = 0.$$

Il vient alors $\psi_u S^a(u)\sigma_u = \mathbf{1}_{\sigma_u=0}$ $m \otimes \mathbb{P}$–p.p. et donc $\sigma_u \neq 0$ soit $\sigma_u > 0$ $m \otimes \mathbb{P}$–p.p.

Réciproquement, si $\sigma_t > 0$ $m\otimes\mathbb{P}$–p.p. Considérons ξ une option régulière M la $\mathbb{P}^*$–martingale $M_t = \mathbb{E}^*\big(\xi^a \mid \mathcal{F}_t\big)$. Comme DM est une $\mathbb{P}$–martingale, nous obtenons via le théorème de représentation des martingales browniennes – voir l'annexe pour les détails –, la représentation

$$\forall t \in [0,T], \qquad M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, dB_s,$$

pour un certain processus H progressivement mesurable. Le reste est un jeu d'écriture : posons $\psi_t = H_t/\big(\sigma_t S^a(t)\big)$ – ce qui a bien un sens puisque $\sigma_t > 0$ (S^a est une exponentielle) – pour obtenir

$$M_t = M_0 + \int_0^t \psi_u \sigma_u S^a(u)\, dB_u = \mathbb{E}^*\big[\xi^a\big] + \int_0^t \psi_u\, dS^a(u).$$

La stratégie autofinancée $(\mathbb{E}^*[\xi^a], \psi)$ simule l'option ξ puisque par construction $V^a = M$ est une $\mathbb{P}^*$–martingale telle que $V^a(T) = M_T = \xi^a$ soit $V_T = \xi$. □

4. La problématique des options

Venons-en à présent aux questions que soulèvent les options. Prenons le point de vue du vendeur de l'option. À l'instant $t = 0$, il vend le contrat – dont le gain pour l'acheteur est la variable aléatoire ξ – et reçoit en échange une certaine somme d'argent que l'on appelle la prime disons x euros. Le premier problème du vendeur est de ne pas perdre d'argent : en effet, à l'instant T, la maturité, il sait qu'il devra verser au détenteur de l'option la somme (aléatoire) $\xi(\omega)$. Pour se couvrir contre ce risque, le vendeur va investir la prime x dans le marché et suivre (ou essayer de trouver) une stratégie autofinancée et minorée ψ de sorte que $V_T^{x,\psi} \geq \xi$ $\mathbb{P}$–p.s. C'est le premier aspect du problème. D'autre part, on imagine sans peine que notre agent n'est pas le seul à proposer ce produit et donc il souhaite être le plus compétitif possible c'est à dire vendre l'option le moins cher possible. Finalement, le prix de l'option ξ apparaît comme

$$P(\xi) = \inf\Big\{x \geq 0,\ \exists (x,\psi) \text{ stratégie minorée t.q. } V_T^{x,\psi} \geq \xi\ \mathbb{P}\text{–}p.s.\Big\}.$$

Il est très facile de montrer que $P(\xi) \geq \mathbb{E}^*[\xi^a]$. En effet, si (x,ψ) est une stratégie minorée telle que $V_T \geq \xi$, V^a est une surmartingale et

$$x = \mathbb{E}^*\big[V^a(0)\big] \geq \mathbb{E}^*\big[V^a(T)\big] \geq \mathbb{E}^*\big[\xi^a\big].$$

En fait, lorsque le marché est complet on obtient un résultat plus précis puisque

Théorème. *Si le marché est complet, $P(\xi) = \mathbb{E}^*[\xi^a]$, l'infimum étant atteint pour une stratégie (x,ψ) telle que $V_T^{x,\psi} = \xi$.*

En effet, puisque le marché est complet, il existe une stratégie (x,ψ) simulant ξ et telle que V^a soit une $\mathbb{P}^*$–martingale. Par suite,

$$x = V^a(0) = \mathbb{E}^*\big[V^a(T)\big] = \mathbb{E}^*\big[\xi^a\big],$$

et (x,ψ) convient.

Remarque. On parle souvent de prix équitable ou « fair price » pour $P(\xi)$. La raison en est la suivante. L'acheteur de l'option paye la prime x et investit dans le marché en espérant lui aussi ne pas perdre d'argent en suivant une bonne startégie ψ. Il souhaite donc que le bénéfice de l'option couvre ses dettes éventuelles au temps T soit $\xi + V_T^{-x,\psi} \geq 0$. D'un point de vue pratique, les acheteurs veulent savoir jusqu'à quel seuil ils pourront ne pas perdre d'argent au total soit

$$\sup\left\{x \geq 0,\ \exists(-x,\psi) \text{ autofinancée t.q. } \xi + V_T^{-x,\psi} \geq 0\ \mathbb{P}\text{–}p.s. \text{ et } V^a\ \mathbb{P}^*\text{–surmartingale}\right\}.$$

Notons $P_-(\xi)$ cette dernière quantité. On montre tout d'abord que $P_-(\xi) \leq \mathbb{E}^*[\xi^a]$. En effet, puisque $\xi \geq 0 = -V_T^{-0,0}$, $P_-(\xi) \geq 0$ et si (x,ψ) est une stratégie autofinancée répondant aux critères on a, $V^a(T) \geq -\xi^a$ et donc via la propriété de surmartingale

$$-\mathbb{E}^*\left[\xi^a\right] \leq \mathbb{E}^*\left[V^a(T)\right] \leq \mathbb{E}^*\left[V^a(0)\right] = -x.$$

Dans le cas d'un marché complet, il existe une stratégie (x,ψ) qui simule l'option et $x = \mathbb{E}^*[\xi^a]$; la stratégie $(-x,-\psi)$ réalise le supremum et par suite $P_-(\xi) = \mathbb{E}^*[\xi^a] = P(\xi)$. Le point de vue de l'acheteur rejoint celui du vendeur, d'où l'expression « prix équitable ».

Formule de Black–Scholes. Impossible d'introduire le modèle de Black–Scholes sans donner la célèbre formule du même nom qui donne le prix du call européen dans le cas le plus simple, celui des coefficients constants. Si on considère une option européenne d'achat de prix d'exercice K et de maturité T, on a $\xi = (S_T - K)^+$. D'après ce qui précède, le prix d'une telle option, disons C, est

$$C = \mathbb{E}^*\left[e^{-rT}(S_T - K)^+\right] = \mathbb{E}^*\left[\left(S^a(T) - e^{-rT}K\right)^+\right].$$

Or, nous avons vu que,

$$S^a(T) = S_0 \exp\left(\sigma B_T - \sigma^2 T/2\right) \overset{(d)}{=} S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{T}G - \sigma^2 T/2\right)$$

où G est une gaussienne centrée réduite. Notant $\alpha = \sigma\sqrt{T}$, on obtient donc

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(S_0 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} - e^{-rT}K\right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_I e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - \frac{e^{-rT}K}{\sqrt{2\pi}}\int_I e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

si $I = \left\{x \in \mathbb{R},\ S_0 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} \geq e^{-rT}K\right\} = [-d^-, +\infty[$ avec

$$d^\pm = \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\alpha^2}{2}}{\alpha} = \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} C &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\geq -d^-} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}}\,dx - \frac{e^{-rT}K}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\geq -d^-} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{y\geq -d^- -\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy - \frac{e^{-rT}K}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\geq -d^-} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \end{aligned}$$

et comme $d^- + \alpha = d^+$, on obtient finalement

$$C = S_0\Phi(d^+) - e^{-rT}K\Phi(d^-),$$

où Φ désigne la fonction de répartition de loi normale centrée réduite.

L'approche EDSr. Nous venons de voir que le prix d'une option européenne, ξ, est donné par « simulation » : plus précisément, on cherche une stratégie autofinancée de valeur finale $V_T = \xi$ et on a $P(\xi) = V_0$.

Or pour une stratégie autofinancée, nous avons $dV_t = \phi_t \, dR_t + \psi_t \, dS_t$, qui devient dans le modèle de Black–Scholes à coefficients constants

$$dV_t = r\phi_t R_t \, dt + \psi_t S_t(\mu \, dt + \sigma \, dW_t),$$

ce qui donne, puisque $\phi_t R_t = V_t - \psi_t S_t$,

$$dV_t = rV_t dt + (\mu - r)\psi_t S_t \, dt + \sigma\psi_t S_t \, dW_t.$$

Déterminer le prix d'une option européenne revient donc naturellement à résoudre une EDSr : en effet, pour simuler l'option ξ, on cherche un couple de processus (V, ψ) tel que l'évolution de V est régie par l'EDS précédente et $V_T = \xi$; on souhaite donc que (V, ψ) soit solution de

$$V_t = \xi - \int_t^T \big(rV_u + (\mu - r)\psi_u S_u\big) \, du - \int_t^T \sigma\psi_u S_u \, dW_u.$$

Pour « coller » au formalisme EDSr, il suffit de changer d'inconnue en posant $Z_t = \sigma\psi_t S_t$ (S est connu) l'équation précédente se réécrit, si l'on note $\theta = (\mu - r)/\sigma$,

$$V_t = \xi - \int_t^T \big(rV_s + \theta Z_s\big) \, ds - \int_t^T Z_s \, dW_s.$$

On obtient ici une EDSr linéaire que l'on peut résoudre « explicitement » retrouvant ainsi la formule $V_0 = P(\xi) = \mathbb{E}^*\big[e^{-rT}\xi\big]$.

Supposons maintenant que « le régulateur du marché » veuille éviter trop de spéculation sur l'action sous-jacente. Il peut soit interdire formellement cette transaction soit, de façon plus subtile, pénaliser les investisseurs qui se livrent à cette pratique. Dans le second cas, lorsqu'un investisseur fait des dettes libélées dans le sous-jacent, il doit payer une pénalité (instantannée) proportionnelle au montant de cette dette soit $\psi_t S_t$. Dans ce dernier cas, dupliquer une option européenne revient à résoudre l'EDSr,

$$dV_t = \big(rV_t + \theta Z_t - \gamma Z_t^-\big) \, dt + Z_t \, dW_t, \qquad V_T = \xi,$$

où γ est une constante positive. Cette EDSr n'est plus linéaire mais les hypothèses du théorème de PARDOUX et PENG sont satisfaites dès que ξ est de carré intégrable.

Un autre exemple d'EDSr non-linéaire intervenant en finance est le suivant :

$$dV_t = \big(rV_t + \theta Z_t\big) \, dt + Z_t \, dW_t - (R - r)(V_t - Z_t/\sigma)^- \, dt, \qquad V_T = \xi.$$

On est amené à résoudre cette dernière équation pour dupliquer une option européenne lorsque le taux d'emprunt R est supérieur au taux r auquel est rémunéré l'argent. Il n'est dans ce cas pas raisonnable d'emprunter de l'argent à un taux R et d'investir au même moment sur le placement sûr dont le taux est r.

Signalons que dans tous les exemples précédents, les stratégies sont admissibles i.e. $V_t \geq 0$. Cela résulte très facilement du théorème de comparaison pour les EDSr.

Commençons par mentionner un résultat élémentaire : une martingale locale minorée est une surmartingale. Soit donc X une martingale locale miorée c'est à dire pour laquelle il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\mathbb{P}$–p.s. $X_t \geq -c$. Quitte à rajouter la constante c à X nous supposons que X est positive. Soit $(\tau_n)_{\mathbb{N}}$ une suite localisante pour X. On a, si $0 \leq s \leq t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme X^{τ_n} est une martingale,

$$\mathbb{E}\left(X_{t\wedge\tau_n} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) = X_{s\wedge\tau_n},$$

et le lemme de Fatou donne, puisque $\tau_n \to +\infty$,

$$\mathbb{E}\left(X_t \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(X_{t\wedge\tau_n} \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) = \liminf_{n\to+\infty} X_{s\wedge\tau_n} = X_s,$$

ce qui montre que X est une surmartingale.

Rappelons maintenant deux théorèmes fondamentaux du calcul stochastique : le théorèmes de représentation des martingales browniennes et le théorème de Girsanov.

Soient W un mouvement brownien d–dimensionnel défini sur un espace de probabilité complet et $T > 0$; on note $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration augmentée de W.

Théorème (Représentation des martingales browniennes). *Soit $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ une martingale locale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$. Alors il existe un unique processus progressivement mesurable $\{H_t\}_{t\in[0,T]}$ tel que $\mathbb{P}$–p.s. $t \longmapsto H_t$ appartient à $\mathrm{L}^2(0,T)$ et $\mathbb{P}$–p.s.*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s \cdot dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

En particulier, dans la filtration brownienne, toutes les martingales locales sont continues.

Théorème (Girsanov, Cameron–Martin). *Soit $\{h_t\}_{t\in[0,T]}$ un processus progressivement mesurable tel que $\mathbb{P}$–p.s. $t \longmapsto h_t$ appartient à $\mathrm{L}^2(0,T)$. Notons, pour $t \in [0,T]$,*

$$D_t = \exp\left\{\int_0^t h_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2\, ds\right\}.$$

Si $\mathbb{E}[D_T] = 1$ alors $\{D_t\}_{t\in[0,T]}$ est une martingale et le processus $B_t = W_t - \int_0^t h_s \cdot dW_s$ est une $\mathcal{F}$–martingale sous la probabilité $\mathbb{P}^*$ de densité D_T sur $\mathcal{F}_T$.

Une condition suffisante pour que $\mathbb{E}[D_T] = 1$ est donnée par la condition suivante, due à Novikov :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T |h_s|^2\, ds\right\}\right] < +\infty.$$

Changement de probabilités. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ une filtration vérifiant les condition habituelles. Soit $\mathbb{P}^*$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que pour tout $t \geq 0$ la restriction de $\mathbb{P}^*$ à $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la restriction de $\mathbb{P}$, de densité D_t. D est trivialement une $\mathbb{P}$–martingale puisque, pour $0 \leq s \leq t$, si $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A\, D_t] = \mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A\, D_s].$$

De plus, X est une $\mathbb{P}^*$–martingale si et seulememt si DX est une $\mathbb{P}$–martingale. En effet, si $s \leq t$ et $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}[D_t X_t \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}^*[X_t \mathbf{1}_A] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}^*[X_s \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[D_s X_s \mathbf{1}_A].$$

En particulier, si ξ est une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$–mesurable et $\mathbb{P}^*$–intégrable,

$$D_t\, \mathbb{E}^*(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(D_T \xi \mid \mathcal{F}_t\right),$$

puisque, pour tout $t \leq T$,

$$D_t\, \mathbb{E}^*(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(D_T \mathbb{E}^*(\xi \mid \mathcal{F}_T) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(D_T \xi \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Plaçons-nous maintenant dans un cadre un peu particulier : on suppose que la filtration est la filtration augmentée d'un mouvement Brownien W (sous $\mathbb{P}$) et que $\mathbb{P}^*$ est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$. D est alors une martingale strictement positive que l'on peut représenter sous la forme

$$D_t = \exp\left\{\int_0^t h_s \cdot dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |h_s|^2\, ds\right\}, \tag{$\sharp$}$$

avec h progressivement mesurable, à trajectoires dans $\mathrm{L}^2(0,T)$. En effet, comme D est une $\mathbb{P}$–martingale brownienne, on a

$$D_t = 1 + \int_0^t u_s \cdot dW_s,$$

pour une processus u progressivement mesurable à trajectoires L^2. La formule d'Itô donne,

$$d \ln D_t = \frac{1}{D_t} u_t \cdot dW_t - \frac{1}{2D_t^2}|u_t|^2\, dt\ ;$$

il suffit de poser $h_t = u_t / D_t$.

Pour finir, signalons que toute $\mathbb{P}^*$–martingale X se représente sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \beta_s \cdot dB_s,$$

où β est progresssivement mesurable à trajectoires L^2 et $B_t = W_t - \int_0^t h_s\, ds$. Remarquons tout d'abord que le résultat n'est pas tout à fait trivial puisque X est certes une $\mathcal{F}^W$ mais sous $\mathbb{P}^*$ W n'est pas un mouvement Brownien. Toutefois, DX est une $\mathbb{P}$–martingale et sous $\mathbb{P}$, W est un mouvement Brownien. On applique le théorème de réprésentation des martingales browniennes pour obtenir

$$D_t X_t = X_0 + \int_0^t u_s \cdot dW_s.$$

Or on a, via la représentation ($\sharp$), $dD_t = D_t h_t \cdot dW_t$ et par suite

$$dD_t^{-1} = D_t^{-1}\big(-h_t \cdot dW_t + |h_t|^2\, dt\big).$$

On écrit $X_t = D_t^{-1} \times D_t X_t$ et la formule d'intégration par parties donne

$$dX_t = D_t^{-1} u_t \cdot dW_t + D_t X_t D_t^{-1}\big(-h_t \cdot dW_t + |h_t|^2\, dt\big) - D_t^{-1} u_t \cdot h_t\, dt = \big(D_t^{-1} u_t - X_t h_t\big) \cdot \big(dW_t - h_t\, dt\big),$$

soit encore notant $\beta_t = D_t^{-1} u_t - X_t h_t$, $dX_t = \beta_t \cdot dB_t$.

Références

[DJP98] R.-A. Dana and M. Jeanblanc-Picqué, *Marchés financiers en temps continus ; valorisation et équilibre*, 2nd ed., Economica, Paris, 1998.

[DS94] F. Delbaen and W. Schachermayer, *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Math. Ann. **300** (1994), no. 3, 463–520.

[DS98] ______, *The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes*, Math. Ann. **312** (1998), no. 2, 215–250.

[Dud77] R. M. Dudley, *Wiener functionals as Itô integrals*, Ann. Probability **5** (1977), no. 1, 140–141.

[HP83] J. M. Harrison and S. R. Pliska, *A stochastic calculus model of continuous trading : complete markets*, Stochastic Process. Appl. **15** (1983), no. 3, 313–316.

[Kar97] I. Karatzas, *Lectures on the mathematics of finance*, CRM Monogr. Ser., vol. 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[KS98] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Methods of mathematical finance*, Appl. Math., vol. 39, Springer-Verlag, New York, 1998.

[LL97] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, second ed., Ellipses Édition Marketing, Paris, 1997.

[MR97] M. Musiela and M. Rutkowski, *Martingale methods in financial modelling*, Appl. Math., vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.