I. Introduction.

1. Objectifs.

Le but de ces quelques séances est d'introduire les outils mathématiques, plus précisément ceux de nature probabiliste, qui interviennent dans les modèles financiers ; nous nous concentrerons principalement sur le problème des *options* avec un intérêt tout particulier pour les options européennes.

Il ne s'agit nullement de développer une théorie mathématique dans ces moindres détails – théorie qui soit dit en passant est relativement complexe – mais bien au contraire de voir comment des objets mathématiques sophistiqués comme le *mouvement brownien* ou la formule d'Itô permettent de donner des réponses assez simples à des problèmes concrets tels que le pricing d'options européennes. Il s'agit aussi de comprendre dans les grandes lignes quels sont les arguments principaux qui conduisent par exemple à la célèbre formule de Black–Scholes. Bien sûr, une part de ce cours est consacré à la manipulation des outils qui interviennent.

D'un point de vue pratique, nous rencontrerons deux types de problèmes : ceux à temps discret et ceux à temps continu. Il va sans dire que dans le deuxième cas, la théorie mathématique sous-jacente est plus délicate. Signalons que si l'investissement est plus élevé, le bénéfice l'est également puisqu'on obtient des formules plus faciles à manipuler.

2. Les options.

a. Présentation du problème.

Une option est un titre qui donne le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre – suivant qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente – une certaine quantité d'actif financier à un prix fixé à l'avance. La durée de vie du contrat est elle aussi fixée lors de la signature du contrat.

On décrit une option à l'aide des éléments suivants :

- la nature de l'option : on parle de *call* dans le cas d'une option d'achat et de *put* dans le cas d'une option de vente ;
- l'actif sous-jacent sur lequel porte l'option : en pratique le sous-jacent peut être une action, une devise voire même une autre option ;
- le nombre de parts d'actif à acheter ou à vendre : nous supposerons toujours ce nombre égal à un ;
- le prix d'exercice qui est le prix auquel se fera la transaction en cas d'exercice de l'option ;
- la maturité ou l'échéance qui est la durée de vie de l'option : on distingue deux types d'options

  (i) les options européennes qui ne peuvent être exercées seulement à maturité

(ii) les options américaines qui peuvent être exercées à n'importe quel instant t entre la signature du contrat et la maturité.

Nous nous intéresserons faute de temps seulement aux options européennes.

Examinons le cas d'un call européen de maturité T et de prix d'exercice K sur une action dont le cours est donné par S : il s'agit donc d'un contrat donnant le droit (mais pas l'obligation) à son détenteur d'acheter à la date T une action S au prix K. À la date T, si le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice soit $S_T \geq K$, le détenteur de l'option a tout intérêt à exercer son option : en effet, il achète une action au prix K qu'il peut revendre instantanément sur le marché au prix S_T réalisant ainsi un bénéfice de $S_T - K$. Dans le cas contraire i.e. $S_T < K$, le détenteur de l'option n'exercera pas son option : personne ne va acheter une action à un prix plus élevé que celui du marché. Il ne fait pas de bénéfice dans ce cas. Si on introduit la notation $x^+ = \max(x, 0)$, l'option procure à son détenteur un bénéfice égal à $(S_T - K)^+$. Adoptons à présent le point de vue du vendeur de l'option. À la date T, il doit être en mesure de fournir la somme $(S_T - K)^+$ pour ne pas perdre d'argent. Mais au moment de la vente de l'option, il ignore bien évidemment quel sera le cours de l'action à la date T. La problématique est double :

(i) à quel prix vendre l'option ? Comment donner un prix à la date $t = 0$ à un produit qui vaudra $(S_T - K)^+$ à la date T ? C'est le problème du pricing.

(ii) Comment le vendeur, qui reçoit la prime à la date $t = 0$, parviendra-t-il à produire la richesse $(S_T - K)^+$ à la date T ? C'est le problème de la couverture.

Pour répondre à ces deux questions, il faut faire un minimum d'hypothèses sur le marché ; la plus importante d'entre elles est *l'absence d'opportunité d'arbitrage* : dans un marché fluide, il n'est pas possible de faire de profits sans prendre de risque. Nous donnerons une définition plus précise dans la suite du cours.

Voyons sur un exemple très simple les idées fondamentales de cette théorie.

b. Un exemple très simple.

Imaginons un marché dans lequel il y a deux dates, l'instant 0 et l'instant 1, et deux actifs. L'un deux est un placement sûr, par exemple une obligation : le prix d'une obligation à la date $n = 0$ est de x euros ; en $n = 1$, il est de $x(1 + r)$ euros . Le second placement lui est risqué ; disons qu'il s'agit d'une action. À l'instant $n = 0$ le prix d'une part de cette action est $s > 0$. Entre les deux instants, le cours de l'action peut soit monter soit baisser. L'action monte avec probabilité $p \in]0, 1[$ et baisse avec probabilité $1 - p$. Dans le cas d'un hausse, la part de l'action vaut su avec $u > 1$ en $n = 1$, dans celui d'une baisse elle vaut sd, $d < 1$.

On considère à présent un call européen de prix d'exercice K, de maturité 1, sur une part de l'action dont le cours est décrit ci-dessus. On suppose que $sd < K < su$. Tentons de répondre aux deux questions suivantes : à quel prix doit-on vendre cette option ? quelle stratégie de couverture ?

La première idée que nous allons illustrer à partir de cet exemple est celle de *duplication* : à l'instant 0, le vendeur de l'option perçoit la prime C_0 qui représente la valeur du call à cette date. Rappelons que la valeur du call au temps 1 est $C_1 = (S_1 - K)^+$ – S_1 désignant le prix aléatoire de l'action au temps 1. La stratégie du vendeur consiste à investir la somme C_0 dans le marché en espérant obtenir, dans tous les cas, que l'action monte ou que l'action baisse, au temps 1 la richesse C_1 qu'il doit être en mesure de verser au détenteur de l'option.

Désignons par ψ le nombre d'actions que le vendeur achète ; dans ce modèle, ψ est un réel ce qui n'est pas très réaliste et le cas $\psi < 0$ correspond à une dette libellée en actions. Le reste de la prime soit $C_0 - \psi S_0$ est converti en obligations ; soit ϕ le nombre d'obligations. À l'instant 0, la valeur du portefeuille du vendeur est $V_0 = \phi\, x + \psi\, S_0$, à l'instant 1 elle sera $V_1 = \phi\, x(1+r) + \psi\, S_1$. Comme le vendeur a investi toute la prime dans le marché, on a $C_0 = V_0$. L'idée de la duplication consiste à trouver la bonne répartition ϕ, ψ pour avoir l'égalité $V_1 = C_1$ dans le cas d'une hausse comme dans celui d'une baisse. Si l'action monte, la valeur du portefeuille devient $\phi\, x(1+r) + \psi\, su$ et l'option est exercée ; sa valeur est alors $su - K$. Si l'action baisse, la valeur du portefeuille devient $\phi\, x(1+r) + \psi\, sd$ et celle de l'option est nulle (elle n'est pas exercée). Pour réaliser l'égalité $C_1 = V_1$, on doit avoir

$$\phi\, x(1+r) + \psi\, su = su - K, \qquad \phi\, x(1+r) + \psi\, sd = 0.$$

Ce système linéaire se résout très facilement ; on obtient

$$\psi = \frac{su - K}{su - sd}, \qquad \phi = -\frac{sd}{x(1+r)} \frac{su - K}{su - sd}.$$

Finalement, on trouve la valeur du call à l'instant 0

$$C_0 = \phi\, x + \psi\, s = \frac{1}{1+r}\,(su - K)\,\frac{(1+r)s - sd}{su - sd} = \frac{1}{1+r}\,(su - K)\,\frac{(1+r) - d}{u - d}.$$

Signalons un fait remarquable de cette formule. La probabilité de hausse ou de baisse de l'action, le nombre p avec les notations précédentes, n'intervient pas dans le calcul de la valeur de l'option au temps 0, seules les valeurs de l'action apparaissent. Ceci peut sembler surprenant : que l'action monte ou baisse avec probabilité 80 % ne change rien à la valeur de l'option.

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le nombre $\frac{(1+r)-d}{u-d}$ appartient à $]0, 1[$. En effet, si $(1 + r) - d \leq 0$, en empruntant s euros en obligations (on doit s/x obligations) et en achetant une action à la date $n = 0$, on doit rembourser à la date $n = 1$ la somme $(1+r)s$; or la vente de l'action fournit la somme S_1 qui vaut au minimum $sd \geq (1+r)s$. De même, si $(1+r) \geq u$, en $n = 0$, on emprunte une action que l'on vend et on investit la somme s dans l'obligation. En $n = 1$, on récupère $(1 + r)s$ somme avec laquelle on achète l'action au prix S_1 qui vaut au maximum $su \leq (1 + r)s$.

Puisque le rapport, $p^* = \frac{(1+r)-d}{u-d}$, appartient à $]0, 1[$ on l'interprète comme une probabilité en définissant la probabilité que l'action monte par p^* et celle que l'action baisse par $1 - p^*$. Avec cette notation, la valeur du call à l'instant 0 se réécrit de la sorte :

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\,(p^* \times (su - K) + (1 - p^*) \times 0) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[C_1].$$

La valeur du call à l'instant $n = 0$ s'obtient comme l'espérance de la valeur du call à l'instant $n = 1$ par rapport à une mesure de probabilité distincte de la mesure de probabilité objective. Cette probabilité s'appelle *probabilité risque neutre.* En voici la raison. On a $(1+r)C_0 = \mathbb{E}^*[C_1]$. C_1 représente la valeur du call à la date $n=1$ c'est à dire le gain que procure le titre. C_0 est le prix de vente de l'option. Sous la probabilité risque neutre, le gain moyen de l'option est égal à la somme obtenue en investissant la somme C_0 payée pour acheter l'option dans le placement sûr.

Pour finir, signalons que sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, on ne peut pas vendre l'option à un prix différent de C_0. Si par exemple, le prix de vente de l'option disons π est strictement inférieur à C_0. On vend ψ actions et ϕ obligations, on obtient la somme C_0 avec laquelle on achète l'option au prix π. La somme restante $C_0 - \pi$ est investie dans l'obligation. À la date $n=1$, on vend l'option qui vaut, par construction, $C_1 = \phi\, x(1+r) + \psi\, S_1$ récupérant ainsi les ϕ obligations et les ψ actions. Le bénéfice est donc $(C_0 - \pi)(1+r) > 0$.

Avant d'illustrer les idées fondamentales apparues ici sur des exemples plus complexes, donnons quelques rappels sur le calcul des probabilités.

3. Quelques notions de probabilités.

Pour illustrer, les notions de probabilité que nous rencontrerons dans la suite du cours, nous utiliserons toujours l'exemple suivant : l'évolution du prix d'une action de prix initial à l'instant $n=0$, $s>0$, sur trois périodes ; d'une période à l'autre le prix de l'action peut être multiplié soit par $u>1$ avec probabilité p dans le cas d'une hausse soit par $d<1$ avec probabilité $q = 1-p$ dans celui d'une baisse. Nous supposerons que les hausses ou baisses successives sont indépendantes les unes des autres. On note S_0, S_1, S_2, S_3 le prix de l'action aux différentes dates.

Pour les applications numériques, nous prendrons un prix initial de 100 euros, des hausses de 20 % soit $u = 1,2$ et des baisses de 5 % soit $d = 0,95$; les haussent interviennent dans 60 % des cas, soit $p = 0,6$ et $q = 0,4$.

a. Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Lorsque un agent investit de l'argent dans l'action S à la date $n=0$ il ne sait bien évidemment pas si l'action va monter ou descendre ; le prix de l'action au temps $n=1$ lui semble aléatoire. Pour décrire un tel phénomène dans lequel le hasard ou tout du moins une certaine forme d'indétermination tient une place importante, on est conduit à introduire un espace probabilisé, noté traditionnellement $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Ω est un ensemble quelconque qui représente l'ensemble de toutes les possibilités, on l'appelle parfois l'univers. Dans notre exemple, on peut prendre pour Ω l'ensemble à huit éléments $\Omega = \{(u,u,u), (u,u,d), \ldots, (d,d,u), (d,d,d)\}$. Un point ω de Ω correspond à une réalisation particulière de l'univers : par exemple $\omega = (u,u,u)$ est la réalisation la plus favorable à l'investisseur : trois hausses successives.

$\mathcal{F}$ est une famille de sous-ensembles de Ω dont on veut connaître la probabilité ; on les appelle des événements. « Le cours de l'action à la date $n=3$ est su^3 » est un événement : il est clair que l'on souhaite connaître la probabilité d'avoir trois hausses. D'un point de vue pratique, le plus simple consiste à prendre pour $\mathcal{F}$ toutes les parties de Ω mais ceci n'est pas toujours possible. Dans tous les cas, $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω c'est à dire une classe non vide de parties de Ω stable par passage au complémentaire et par union dénombrable.

$\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité : à tout événement A de la tribu $\mathcal{F}$, on associe le nombre de $[0,1]$, $\mathbb{P}(A)$, qui représente les chances que se réalise l'événement A. On a $\mathbb{P}(S_3 = su^3) = p^3$ soit 21,6 % d'avoir trois hausses successives. Une mesure de probabilité est définie par les propriétés : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et pour des événements A_n, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$ alors $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$; cette relation généralise la formule bien connue $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

Variable aléatoire. En général, on ne s'intéresse pas directement à l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mais à certaines quantités obtenues à partir de l'espace Ω que l'on appelle des variables aléatoires. Mathématiquement, une variable aléatoire est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant une condition supplémentaire que j'omets volontairement ici. Par exemple, X peut représenter la valeur de l'action au temps 2 : $X[(u,u,u)] = su^2$, $X[(d,u,u)] = sdu$, $X[(u,d,u)] = sdu$, $\ldots$.

Une variable aléatoire X est discrète si $X(\Omega)$ est une ensemble fini ou dénombrable. Si X n'est pas discrète elle est dite continue. Dans le cas discret, pour toute fonction f, on définit l'espérance de $f(X)$ via

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x) \ ;$$

il faut bien sûr pouvoir donner un sens à cette somme.

Parmi les variables aléatoires continues, on distingue celles qui possèdent une densité. Si la variable X a pour densité p, l'espérance de X est définie par

$$\mathbb{E}\left[f(X)\right] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, p(x)\, dx.$$

Une variable X est gaussienne centrée réduite ou normale centrée réduite si elle a pour densité la fonction $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

La valeur moyenne d'une variable aléatoire X correspond à la fonction $f(x) = x$. Si on considère pour X le cours de l'action après trois périodes, S_3, on a

$$\mathbb{E}\left[S_3\right] = su^3\, \mathbb{P}\left(S_3 = su^3\right) + su^2 d\, \mathbb{P}\left(S_3 = su^2 d\right) + sud^2\, \mathbb{P}\left(S_3 = sud^2\right) + sd^3\, \mathbb{P}\left(S_3 = sd^3\right),$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}\left[S_3\right] = su^3\, p^3 + su^2 d\, 3p^2(1-p) + sud^2\, 3p(1-p)^2 + sd^3\,(1-p)^3 = s[up + d(1-p)]^3,$$

soit $\mathbb{E}[S_3] = 133,1$. En moyenne, l'action vaut 133,1 euros après trois périodes ce qui est relativement favorable.

Une fois qu'on connaît la moyenne d'une variable aléatoire X, on s'intéresse à la dispersion des valeurs de X autour de cette moyenne. Cette dispersion est mesurée par la racine carrée de la variance de X définie par

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Si on reprend le même exemple, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_3^2\right] &= \left(su^3\right)^2 p^3 + \left(su^2d\right)^2 3p^2(1-p) + \left(sud^2\right)^2 3p(1-p)^2 + \left(sd^3\right)^2 (1-p)^3 \\ &= s^2\left[u^2p + d^2(1-p)\right]^3\end{aligned}$$

et par suite

$$\mathbb{V}[S_3] = s^2\left[u^2p + d^2(1-p)\right]^3 - s^2[up + d(1-p)]^6.$$

b. Conditionnement.

Pour effectuer certains calculs, on dispose d'une information supplémentaire : par exemple, si on se place à l'instant 2, on connaît la valeur de l'action au premier instant. Comment prendre en compte ce supplément d'information pour déterminer la probabilité que le cours de l'action à l'instant 3 soit su^3. C'est la notion de probabilité conditionnelle.

Probabilité conditionnelle. Si B est un événement de probabilité strictement positive, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel de $[0,1]$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Il représente la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est lui même réalisé.

Par exemple, la probabilité que le cours de l'action à l'instant 3 soit égal à su^2d sachant qu'il était égal à su à l'instant 1 est $2\,p(1-p)$.

Espérance conditionnelle. On souhaite également prendre en compte, toute l'information disponible pour calculer l'espérance des variables aléatoires. Si par exemple Y est une variable aléatoire, on a

$$\mathbb{E}[Y|B] = \mathbb{E}[Y\,\mathbf{1}_B]/\mathbb{P}(B).$$

Cela revient à calculer l'espérance de la la variable aléatoire Y par rapport à la mesure de probabilité μ définie par $\mu(A) = \mathbb{P}(A|B)$. Pour fixer les idées, si Y est une variable aléatoire discrète,

$$\mathbb{E}[Y|B] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y = y|B).$$

On a, si on revient à notre exemple,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_3|S_1 = su] &= su^3\,\mathbb{P}(S_3 = su^3 \mid S_1 = su) + su^2d\,\mathbb{P}(S_3 = su^2d \mid S_1 = su) \\ &\quad + sud^2\,\mathbb{P}(S_3 = sud^2 \mid S_1 = su) + sd^3\,\mathbb{P}(S_3 = sd^3 \mid S_1 = su) \\ &= su^3\,p^2 + su^2d\,2p(1-p) + sud^2\,(1-p)^2 + 0 \\ &= su[up + d(1-p)]^2 = 145,2.\end{aligned}$$

Nous passons à une notion plus délicate : celle d'espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire. La situation est la suivante : on connaît toute l'information véhiculée par une variable aléatoire X et on on voudrait prédire, à partir de cette information, une autre variable aléatoire Y. En d'autres termes, on souhaite déterminer la meilleure approximation – meilleure au sens des moindres carrés – de Y compte tenu de l'information disponible. Dans le cas d'une variable X discrète, le résultat est relativement simple puisque

$$\mathbb{E}(Y|X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{E}[Y \mid X = x] \, \mathbf{1}_{X=x}.$$

On montre comme précédemment que $\mathbb{E}[S_3|S_1 = sd] = ds[up + d(1-p)]^2$ d'où l'on déduit que

$$\mathbb{E}(S_3 \mid S_1) = [up + d(1-p)]^2 \left(su\mathbf{1}_{S_1=su} + sd\mathbf{1}_{S_1=sd} \right).$$

C'est une variable aléatoire qui ne dépend que de la variable S_1.

Dans le cas général, c'est un peu plus compliqué. L'espérance conditionnelle de Y sachant X, $\mathbb{E}(Y \mid X)$ est définie par dualité : c'est l'unique variable aléatoire Z s'écrivant $Z = f(X)$ vérifiant, pour toute fonction g bornée $\mathbb{E}[Zg(X)] = \mathbb{E}[Yg(X)]$.

Il faut retenir les propriétés de l'espérance conditionnelle, $\mathbb{E}(Y \mid X)$:

(i) $\mathbb{E}(Y \mid X)$ s'écrit comme une fonction de X, $f(X)$, ce qui signifie entre autre que si on connaît X, on connaît $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

(ii) $\mathbb{E}(h(X)Y \mid X) = h(X)\,\mathbb{E}(Y \mid X)$.

(iii) si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}[Y]$: la connaissance de X n'apporte pas d'information pour la connaissance de Y.

(iv) $\mathbb{E}(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \mid X) = \lambda_1\,\mathbb{E}(Y_1 \mid X) + \lambda_2\,\mathbb{E}(Y_2 \mid X)$.

II. Modèles financiers à temps discret.

1. Notion de martingales à temps discret.

On se donne un entier non nul N qui sera plus tard l'échéance des transactions considérées et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Un point fondamental en mathématique financière est la gestion de l'information disponible au cours du temps. Pour les problèmes qui nous intéressent, l'information est véhiculée par une suite de variables aléatoires et augmente au cours du temps. Imaginons que Z_i soit constitué des quarante valeurs des actions du CAC 40 à l'instant i ; à l'instant $i = 1$, l'information disponible est celle engendrée par les prix à l'instant 0 et 1 chose que l'on note $\mathcal{F}_1 = \sigma(Z_0,\, Z_1)$ puis à l'instant 2, l'information disponible augmente puisqu'on dispose alors des prix Z_2 ; on a alors $\mathcal{F}_2 = \sigma(Z_0, Z_1, Z_2)$ et ainsi de suite. Finalement, pour tout entier n, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_i,\, i \leq n)$. On obtient une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ c'est à dire une filtration.

Processus stochastique. On appelle processus stochastique $X = (X_i)_{i=0,\dots,N}$ la donnée de $N+1$ variables aléatoires $X_0,\, \dots,\, X_N$. Un processus X est dit adapté à la filtration $\mathcal{F}_n$ si pour tout i, X_i est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_i$ ce qui signifie que X_i ne dépend que de $Z_0,\, Z_1,\, \dots,\, Z_i$. Il est dit prévisible si X_i ne dépend que $Z_0,\, Z_1,\, \dots,\, Z_{i-1}$ pour tout entier i.

Parmi les processus stochastiques, nous distinguerons une classe particulière, celle des martingales.

Martingales. Une martingale X est un processus stochastique, adapté, vérifiant

$$\forall i = 1, \dots, N, \qquad \mathbb{E}(X_i \,|\, \mathcal{F}_{i-1}) = X_{i-1}.$$

Donnons trois exemples importants de martingales :

1. si on se donne une suite de variables aléatoires ξ_i indépendantes et intégrables telles que $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$, alors le processus $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ est une martingale ;
2. si on se donne une variable aléatoire X intégrable, le processus $X_n = \mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{F}_n)$ est une martingale ;
3. enfin, si M est une martingale et H un processus *prévisible*, alors le processus défini par
$$X_0 = 0, \qquad X_n = H_1(M_1 - M_0) + \ldots + H_n(M_n - M_{n-1}),$$
est une martingale appelée intégrale stochastique discrète de H par rapport à M.

Signalons que pour une martingale M, on a pour tout entier n, $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$.

2. Modèles financiers discrets.

a. Description du marché.

Ici Ω est un ensemble fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\mathbb{P}(\{w\}) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. N est un entier non nul qui représente la maturité des options négociées.

Le marché est constitué d'un actif sans risque (par exemple une obligation) et de d actifs risqués (des actions). Le prix d'une part de l'actif sans risque est R_n à l'instant n. On suppose que $R_0 = 1$ de sorte que R_n représente aussi la somme obtenue au temps n si on place 1 euro au temps 0. On note $a_n = 1/R_n$ le taux d'actualisation. Le prix d'une part de l'actif risqué de type i est S_n^i à l'instant n ; on note $S_n = \left(S_n^1, \ldots, S_n^d\right)$ le vecteur des prix et on suppose que $S_0 \in]0, +\infty[^d$.

On définit, pour tout $n = 0, \ldots, N$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{R_k,\ S_k,\ k \leq n\}$ et on suppose – ce qui n'est pas une restriction – que $\mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$.

b. Constitution d'un portefeuille.

Stratégie de financement. C'est la donnée d'un processus $(\phi_n, \psi_n)_{n=0,\ldots,N}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ *prévisible*. ϕ_n représente la quantité d'actif non risqué détenu au temps n et, pour $i = 1, \ldots, d$, ψ_n^i représente le nombre d'actions de type i détenues au temps n. Plus précisément, pour $n \geq 1$, ϕ_n et ψ_n^i représente le nombre de parts des différents actifs après la réactualisation du temps $n-1$, répartition conservée jusqu'à la réactualisation suivante ; ϕ_0 et ψ_0^i détermine la répartition initiale du portefeuille.

La prévisibilité du processus (ϕ_n, ψ_n) s'interprète de la sorte : une fois les cours au temps n connus, l'agent rebalance son portefeuille pour obtenir la répartition (ϕ_{n+1}, ψ_{n+1}) ; il ne dispose pour déterminer la composition de son portefeuille au temps $n+1$ que des prix jusqu'en n pas ceux en $n+1$.

La valeur du portefeuille au temps n est :

$$V_n = \phi_n\, R_n + \psi_n \cdot S_n = \phi_n\, R_n + \psi_n^1\, S_n^1 + \ldots + \psi_n^d\, S_n^d,$$

et la valeur actualisée est, comme $a_n\, R_n = 1$:

$$\widetilde{V}_n = \phi_n + \psi_n \cdot \widetilde{S}_n = \phi_n + \psi_n^1\, \widetilde{S}_n^1 + \ldots + \psi_n^d\, \widetilde{S}_n^d.$$

Stratégie autofinancée. C'est une stratégie de financement vérifiant en plus la condition $\phi_{n+1}\, R_n + \psi_{n+1} \cdot S_n = \phi_n\, R_n + \psi_n \cdot S_n$ soit, avec la notation $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$,

$$\forall n = 0, \ldots, N-1, \qquad \Delta\phi_{n+1}\, R_n + \Delta\psi_{n+1} \cdot S_n = 0.$$

À l'instant n, l'agent regarde les cours et réajuste son portefeuille passant de la répartition (ϕ_n, ψ_n) à (ϕ_{n+1}, ψ_{n+1}) : il réinvestit toute la somme ; il n'y a ni apport personnel ni consommation.

Une stratégie autofinancée, SAF en abrégé, est une stratégie pour laquelle les variations de la valeur du portefeuille sont dues uniquement aux gains provenant de l'agitation des cours puisque, pour une SAF,

$$\Delta V_n = \phi_n\, \Delta R_n + \psi_n \cdot \Delta S_n.$$

On obtient la même formule pour les variations actualisées de la valeur du portefeuille soit, comme $\widetilde{R}_n = 1$,

$$\Delta\widetilde{V}_n = \phi_n\, \Delta\widetilde{R}_n + \psi_n \cdot \Delta\widetilde{S}_n = \psi_n \cdot \Delta\widetilde{S}_n.$$

Cette dernière formule est encore plus instructive que la précédente ; elle nous apprend qu'une SAF est caractérisée par la valeur initiale du portefeuille et le processus ψ à partir du temps 1. En effet,

$$\widetilde{V}_n = \widetilde{V}_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta\widetilde{V}_k = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \psi_k \cdot \Delta\widetilde{S}_k.$$

c. Opportunité d'arbitrage.

Stratégie admissible. Une stratégie admissible est une SAF pour laquelle la valeur du portefeuille associé est à chaque instant positive.

Ceci signifie qu'à chaque instant l'investisseur doit être en mesure de rembourser les dettes contractées. Ceci n'est pas très réaliste et parfois on considère des SAF minorées ; dans ce cas, les dettes ne doivent pas dépasser un certain seuil.

Opportunité d'arbitrage. Une opportunité d'arbitrage est une stratégie admissible vérifiant : $V_0 = 0$ et $\mathbb{P}(V_N > 0) > 0$.

Cette définition traduit bien l'idée de faire du profit sans risque à partir de rien : partant d'une richesse initiale $V_0 = 0$ on crée une richesse puisque $V_N \geq 0$ (la stratégie est admissible) strictement positive avec probabilité non nulle i.e. $\mathbb{P}(V_N > 0) > 0$.

Marché viable. C'est un marché financier dans lequel il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage. On fait souvent cette hypothèse connue sous le nom d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

Le résultat majeur pour ce qui est de l'hypothèse (AOA) est le suivant :

Théorème. *Un marché discret est viable si et seulement si il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus des prix actualisés $\widetilde{S}$ est une martingale.*

Dans un marché viable, toute probabilité $\mathbb{P}^*$ faisant des prix actualisés une martingale s'appelle une *probabilité risque neutre* ; nous avons vu dans l'exemple introductif comment une telle probabilité permettait de trouver le prix des options.

Il faut bien noter que le valeur actualisée du portefeuille est également une martingale sous une probabilité risque neutre. En effet, pour une SAF

$$\forall n = 0, \ldots, N, \qquad \widetilde{V}_n = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \psi_k \cdot \Delta\widetilde{S}_k,$$

et donc $\widetilde{V}$ apparaît comme l'intégrale stochastique discrète de ψ par rapport à $\widetilde{S}$. Si on travaille avec une probabilité risque neutre, $\widetilde{S}$ devient une martingale et il en est de même pour $\widetilde{V}$ comme ψ est prévisible. Par suite, l'existence d'une probabilité risque neutre assure l'absence d'arbitrage : on a $\mathbb{E}^*\left[\widetilde{V}_N\right] = \mathbb{E}^*[V_0]$ et donc, si $V_0 = 0$, il en est de même pour $\widetilde{V}_N$ et pour V_N.

Parité call-put. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, les valeurs C_n et P_n d'un call et d'un put européen de même sous-jacent S, de même maturité N, et de même prix d'exercice K sont liées par la relation :

$$C_n - P_n = S_n - KR_n/R_N.$$

Si par exemple, $C_n - P_n > S_n - KR_n/R_N$, on achète une action et un put et on vend un call ; la somme résultant de cette opération, $C_n - P_n - S_n$, positive ou négative, est mise dans le placement sûr. Au temps N, deux cas se présentent :

(i) $S_N > K$: le call est exercé. On livre l'action en recevant la somme K. On solde le placement sûr. Bénéfice : $K + R_N(C_n - P_n - S_n)/R_n > 0$.

(ii) $S_N \leq K$: on exerce le put. On vend l'action en recevant la somme K ; on solde la placement sûr. Bénéfice : $K + R_N(C_n - P_n - S_n)/R_n > 0$.

d. Évaluation des options européennes.

Actif conditionnel européen. On appelle actif conditionnel européen (ACE en abrégé) – ou encore option européenne – de maturité N toute variable aléatoire X positive et mesurable par rapport à $\mathcal{F}_N$: X est une fonction des prix jusqu'à l'instant N. Elle représente la valeur de l'option à maturité ou encore le gain que procure l'option à son détenteur.

Dans le cas d'un call européen on a $X = (S_N - K)^+$, dans celui d'un put européen $X = (K - S_N)^+$. Pour une option d'échange, à maturité vous pouvez échanger une action de type 1 contre une de type 2, $X = (S_N^2 - S_N^1)^+$.

ACE simulable. Un ACE X est simulable – ou encore duplicable – s'il existe une stratégie admissible (V_0, ψ) dont la valeur à l'échéance est X.

Dans un marché viable, un ACE X est simulable dès qu'il existe une SAF qui duplique X. X étant positive, la probabilité risque neutre entraîne l'admissibilité de la stratégie.

Marché complet. C'est un marché pour lequel tout ACE est simulable.

Théorème. *Un marché viable est complet si et seulement si il existe une unique probabilité risque neutre.*

Prix d'un ACE. Si X est un ACE de maturité N, on note, pour $n = 0, \ldots, N$, X_n la valeur de l'ACE au temps n. On a bien évidemment $X_N = X$.

Théorème. *Dans un marché viable et complet, le prix d'un ACE X est déterminé de manière unique par*

$$X_n = R_n \, \mathbb{E}^*\left[a_N \, X \mid \mathcal{F}_n\right], \qquad \textit{en particulier} \quad X_0 = \mathbb{E}^*\left[a_N \, X\right].$$

Les anglo-saxons parlent de fair price.

En effet, si (V_0, ψ) est une stratégie admissible qui simule X, la valeur du portefeuille est, à chaque instant, $\widetilde{V}_n = \mathbb{E}^*\left(\widetilde{V}_N \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}^*(a_N X \mid \mathcal{F}_n)$. C'est la richesse qui détenue à l'instant n, permet, en suivant la stratégie ψ de produire exactement la richesse X en N. Si on vend l'option a un prix distinct de V_n, on obtient des arbitrages. Par exemple si $X_n < V_n$, un agent peut, au temps n, vendre la stratégie ψ et acheter l'option. L'argent restant soit $V_n - X_n$ est investi dans le placement sûr. Au temps N, l'option lui procure la somme $X_N = X$ avec laquelle il peut racheter la stratégie ψ. Il fait un bénéfice de $(V_n - X_n)a_n R_N$.

e. Le modèle de Cox–Ross–Rubinstein.

C'est une version discrète du célèbre modèle de Black–Scholes. Dans ce modèle il y a un seul actif risqué – le prix unitaire est S_n – et un actif non risqué de rendement certain sur une période r soit $R_n = (1+r)^n$.

Pour l'actif risqué, S_0 est un réel strictement positif et, entre deux périodes consécutives, il peut passer de S_n à uS_n ou à dS_n avec $0 < d < u$. On note pour $n = 1, \ldots, N$, $T_n = S_n / S_{n-1}$ qui est à valeurs dans $\{d, u\}$.

On prend $\Omega = \{d, u\}^N$ et la filtration $\mathcal{F}_n$ est celle de S. Notons que la connaissance de $\mathbb{P}$ équivaut à celle des variables aléatoires $T_1, \ldots, T_N$.

Nous supposons que $d < 1 + r < u$. Sans cette hypothèse, le marché n'est pas viable. En effet, si $1 + r \leq d$, à l'instant $n = 0$, on emprunte S_0 et on achète une action. En N, on dispose de $S_N - (1+r)^N S_0 \geq S_0 \left[d^N - (1+r)^N\right] \geq 0$; cette somme est strictement positive dès qu'il y a une au moins une hausse ce qui est un événement de probabilité strictement positive. De la même manière, on peut construire des arbitrages lorsque $1 + r \geq u$.

Le marché est viable et complet. Soit $\mathbb{P}^*$ une probabilité. Le processus des prix actualisés est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ si et seulement si

$$\widetilde{S}_n = \mathbb{E}^*\left(\widetilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}^*\left(\widetilde{S}_n T_{n+1}(1+r)^{-1} \mid \mathcal{F}_n\right) = (1+r)^{-1}\widetilde{S}_n\, \mathbb{E}^*\left(T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right),$$

soit $\mathbb{E}^*\left(T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 + r$.

On déduit de cette équivalence que le processus des prix est une martingale sous $\mathbb{P}^*$ si et seulement si les variables aléatoires T_i sont indépendantes et identiquement distribuées avec

$$\mathbb{P}^*(T_i = u) = p^*, \quad \text{et} \quad p^* = \frac{1 + r - d}{u - d}.$$

Tout d'abord, si les T_i vérifient la condition précédente alors $\mathbb{E}^*\left(T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = 1 + r$ et donc $\widetilde{S}$ est une martingale : en effet, par indépendance

$$\mathbb{E}^*\left(T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}^*\left[T_{n+1}\right] = u\,\mathbb{P}^*\left(T_{n+1} = u\right) + d\,\mathbb{P}^*\left(T_{n+1} = d\right) = (u - d)p^* + d = 1 + r.$$

Réciproquement, si $\widetilde{S}$ est une martingale on a

$$(1 + r) = \mathbb{E}^*\left(T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = d\,\mathbb{P}^*\left(T_{n+1} = d \mid \mathcal{F}_n\right) + u\,\mathbb{P}^*\left(T_{n+1} = u \mid \mathcal{F}_n\right),$$

soit encore

$$(1+r) = d + (u-d)\,\mathbb{P}^*\left(T_{n+1} = u \mid \mathcal{F}_n\right), \qquad \mathbb{P}^*\left(T_{n+1} = u \mid \mathcal{F}_n\right) = p^*.$$

On a alors, le résultat par récurrence ; par exemple

$$\mathbb{P}^*\left(T_2 = u,\, T_1 = u\right) = \mathbb{E}^*\left[\mathbb{P}^*\left(T_2 = u,\, T_1 = u \mid \mathcal{F}_1\right)\right] = \mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{T_1=u}\,\mathbb{P}^*\left(T_2 = u \mid \mathcal{F}_1\right)\right] = p^*\,p^*.$$

La probabilité risque neutre est donc déterminée de manière unique : le marché est viable et complet.

Parité call-put et couverture. Rappelons que

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1+r)^{n-N}\left\{\mathbb{E}^*\left((S_N-K)^+ \mid \mathcal{F}_n\right) - \mathbb{E}^*\left((K-S_N)^+ \mid \mathcal{F}_n\right)\right\} \\ &= (1+r)^{n-N}\,\mathbb{E}^*(S_N - K \mid \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

On a de plus

$$\mathbb{E}^*(S_N \mid \mathcal{F}_n) = S_n\,\mathbb{E}^*(T_N \ldots T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n\,\mathbb{E}^*(T_N \ldots T_{n+1}) = S_n(1+r)^{N-n}.$$

Par suite, $C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{n-N}$.

Posons $U = T_{n+1} \ldots T_N$ pour avoir

$$C_n = (1+r)^{n-N}\,\mathbb{E}^*\left((S_n U - K)^+ \mid \mathcal{F}_n\right) = C(n, S_n),$$

avec

$$C(n,x) = (1+r)^{n-N}\sum_{i=0}^{N-n} \mathrm{C}_{N-n}^i \left(x u^i d^{N-n-i} - K\right)^+ (p^*)^i (1-p^*)^{N-n-i}.$$

D'autre part, pour une stratégie de couverture, $C_n = \phi_n(1+r)^n + \psi_n S_n$ et comme ϕ_n et ψ_n ne dépendent que de $S_0, \ldots, S_{n-1}$, on a sur $\{T_n = u\}$,

$$C(n, S_{n-1}u) = \phi_n(1+r)^n + \psi_n S_{n-1} u,$$

et sur $\{T_n = d\}$

$$C(n, S_{n-1}d) = \phi_n(1+r)^n + \psi_n S_{n-1} d.$$

Par suite,

$$\psi_n = \frac{C(n, S_{n-1}u) - C(n, S_{n-1}d)}{(u-d)S_{n-1}}.$$

On connaît la stratégie de couverture.

Un exemple concret. Nous reprenons les valeurs numériques précédentes. On se place sur une période et on cherche le prix ainsi que la stratégie de couverture d'un call européen de prix d'exercice $K = 105$ euros. On suppose que le taux d'intérêt est de 10 % soit $r = 0,1$.

On a, d'après les résultats généraux,

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\,\mathbb{E}^*\left[(S_1 - K)^+\right].$$

La probabilité risque neutre, qui est unique, donne une probabilité de hausse égale à $p^* = (1+r-d)/(u-d) = 0,15/0,25 = 0,6$. Par suite,

$$C_0 = \frac{1}{1+r} \times (su - K) \times p^* = \frac{1}{1,1} \times 15 \times 0,6 \simeq 8,18.$$

Pour la stratégie de couverture, on a

$$\psi_1 = \frac{C(1,su) - C(1,sd)}{(u-d)s} = \frac{C(1,120) - C(1,95)}{25} = \frac{(120-105)^+ - (95-105)^+}{25} = 0,6.$$

La signification est la suivante, le vendeur reçoit la valeur C_0 ; il achète $0,6$ action pour 60 euros et emprunte donc $60 - C_0$ euros. Au temps 1, son portefeuille vaut $0,6 \times S_1 - (60 - C_0) \times (1+r)$ soit $0,6 \times S_1 - (66-9) = 0,6 \times S_1 - 57$. Si l'action monte, son portefeuille vaut $0,6 \times 120 - 57 = 15$; dans ce cas le call est exercé, il doit verser $120 - 105 = 15$ euros au détenteur de l'option. Si l'action baisse, son portefeuille vaut $0,6 \times 95 - 57 = 0$. Or dans ce cas, le call n'est pas exercé : il ne doit rien au détenteur.

Cherchons à présent le prix du put et la stratégie de couverture en revoyant la méthode. Le vendeur perçoit la prime P_0 avec laquelle il achète ψ actions et investit la somme restante $\phi = P_0 - \psi s$ dans le placement sûr. Si l'action monte, il aura $\psi su + \phi(1+r)$ et ne devra rien payer puisque le put ne sera pas exercé. Si l'action baisse, il aura $\psi sd + \phi(1+r)$ et devra payer $K - sd$ au détenteur du put qui exercera. On doit donc avoir

$$120\psi + 1,1\phi = 0, \qquad 95\psi + 1,1\phi = 10,$$

ce qui donne

$$\psi = -10/25 = -0,4 \qquad \phi = 0,4 \times 120/1,1 \simeq 43,64.$$

Le prix du put est de

$$P_0 = -0,4 \times 100 + \phi \simeq 3,64.$$

La stratégie de couverture consiste à faire un emprunt de $0,4$ action et à investir dans la placement sûr la somme de $43,64$ euros.

On peut vérifier la parité call-put : $C_0 - P_0 = S_0 - K/(1+r)$. On a dans notre exemple $C_0 - P_0 \simeq 8,18 - 3,64 = 4,54$ et $S_0 - K/(1+r) = 100 - 105/1,1 \simeq 4,54$.