Construction du Mouvement Brownien.

L'objectif est ici de construire le mouvement brownien de façon élémentaire comme processus gaussien de covariance $s \wedge t$. Pour ce faire, nous utiliserons la base de Haar de $\mathrm{L}^2([0,1])$.

1. Processus gaussien et mouvement brownien.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et T un ensemble non vide ; dans la plupart des cas, $T = \mathbb{N}$, $T = \mathbb{R}_+$ ou $T = [0,1]$. On considère, pour tout $t \in T$, une application $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition. $X = \{X_t\}_{t \in T}$ est un processus stochastique (réel) si, pour chaque $t \in T$, X_t est une variable aléatoire réelle.

X est un processus gaussien si, pour tout $(t_1, \ldots, t_n) \in T^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, la variable aléatoire réelle $\lambda_1 X_{t_1} + \ldots + \lambda_n X_{t_n}$ est gaussienne.

Un processus aléatoire est donc une famille de variables aléatoires. Remarquons également que lorsque T est un ensemble fini, la définition d'un processus gaussien n'est rien d'autre que celle d'un vecteur gaussien.

On appelle moyenne et covariance d'un processus gaussien X les fonctions $m : T \longrightarrow \mathbb{R}$ et $C : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$m(t) = \mathbb{E}[X_t], \qquad C(t,s) = \mathbb{E}[X_t X_s] - \mathbb{E}[X_t]\,\mathbb{E}[X_s].$$

X est dit centré si $m \equiv 0$.

Définition. Un processus stochastique $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien si :

(i) $B_0 = 0$;
(ii) pour tout $t > 0$, B_t a pour loi $\mathcal{N}(0,t)$;
(iii) pour tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, $\ldots$, $B_{t_2} - B_{t_1}$ sont indépendantes ;
(iv) $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Un processus vérifiant la propriété (iv) de la définition précédente est dit à trajectoires continues.

Il n'est pas évident à priori qu'un tel processus existe et nous allons en donner une construction s'appuyant sur les processus gaussiens. Commençons par établir la proposition suivante.

Proposition 1. *Si B est un processus gaussien centré, de covariance $s \wedge t$, à trajectoires continues tel que $B_0 = 0$ alors B est un mouvement brownien.*

Démonstration. Soit B un processus gaussien, centré, de covariance $s \wedge t$, à trajectoires continues tel que $B_0 = 0$. Si $t > 0$, B_t est une variable gaussienne centrée de variance $t \wedge t = t$. Reste donc à montrer l'indépendance des accroissements. Puisque B est un processus gaussien $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_2} - B_{t_1})$ est un vecteur gaussien centré. Il suffit donc de montrer l'orthogonalité pour obtenir l'indépendance. Or, si $s \leq t \leq u \leq v$,

$$\mathbb{E}[(B_v - B_u)(B_t - B_s)] = \mathbb{E}[B_v B_t] - \mathbb{E}[B_u B_t] - \mathbb{E}[B_v B_s] + \mathbb{E}[B_u B_s] = t - t - s + s = 0.$$

B est bien un mouvement brownien. $\square$

2. Base de Haar.

Construisons une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([0,1])$.

Pour tout entier n, désignons par $D_{n,k}$, $k=0,\dots,2^n-1$, le k^{e} intervalle dyadique d'ordre n de $[0,1]$ soit $D_{n,k}=[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[$ et par $\mathcal{D}_n$ l'espace vectoriel engendrée par les fonctions $\mathbf{1}_{D_{n,k}}$, $k=0,\dots,2^n-1$. Pour n fixé, les intervalles $D_{n,k}$ sont disjoints et, puisque $D_{n,k}=D_{n+1,2k}\cup D_{n+1,2k+1}$, on a $\mathcal{D}_n\subset\mathcal{D}_{n+1}$. Montrons que $\mathcal{D}=\mathrm{Vect}(\mathcal{D}_n,\ n\in\mathbb{N})$ est dense dans $\mathrm{L}^2([0,1])$.

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout entier n, notons $f_n(x)=f\left(2^{-n}[2^nx]\right)$; $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur $[0,1]$ puisque $\|f_n-f\|_\infty\le\omega_f\left(2^{-n}\right)$. La convergence a également lieu dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+)$ car $\|f_n-f\|_2\le\|f-f_n\|_\infty$ et, comme, pour $x\in[0,1[$,

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}f\left(k2^{-n}\right)\mathbf{1}_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}(x)+f(1)\,\mathbf{1}_{\{1\}}(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}f\left(k2^{-n}\right)\mathbf{1}_{D_{n,k}}(x),$$

f est limite dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}$; les fonctions continues étant denses dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ il en va de même de $\mathcal{D}$.

Notons u la fonction réelle $u(t)=\mathbf{1}_{[0,\frac12[}(t)-\mathbf{1}_{[\frac12,1[}(t)$. Pour tout $t\in[0,1]$, posons $u_0(t)=\mathbf{1}_{[0,1[}(t)$ et, pour tous $n\ge0$ et $0\le k\le 2^n-1$, $u_{2^n+k}(t)=u(2^nt-k)$ soit encore

$$u_{2^n+k}(t)=\mathbf{1}_{D_{n+1,2k}}(t)-\mathbf{1}_{D_{n+1,2k+1}}(t)=\begin{cases}1, & \text{si}\quad k\,2^{-n}\le t<(2k+1)\,2^{-(n+1)},\\ -1, & \text{si}\quad (2k+1)\,2^{-(n+1)}\le t<(k+1)\,2^{-n},\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Les fonctions $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ forment un système orthogonal dans $\mathrm{L}^2([0,1])$. En effet, pour $p\ge1$, $\int_0^1u_p(t)\,dt=0$ de sorte que u_p et u_0 sont orthogonales. Soient $q>p>0$. Notons $p=(n,k)$ avec $2^n\le p<2^{n+1}$ soit $n=[\ln(p)/\ln(2)]$ et $k=p-2^n$; de même $m=(q,l)$. Si $m=n$ alors $u_p(x)u_q(x)=0$ pour tout $x\in[0,1[$ et sont donc orthogonales. Supposons $m>n$. $u_p=u_{2^n+k}$ est constante sur les intervalles dyadiques d'ordres $n+1$, $D_{n+1,i}$, $i=0,\dots,2^n-1$ donc sur tout intervalle dyadique d'ordre supérieur. En particulier, u_p est constante sur $\{x\in[0,1]:u_q(x)\neq0\}=D_{m,l}$. Comme u_q est centrée, u_p et u_q sont orthogonales.

Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $D_n=H_n$ où H_n est l'espace vectoriel engendré par les 2^n premières fonctions u_p soit $H_n=\mathrm{Vect}\left(u_p:0\le p<2^n\right)$. Pour $n=0$, c'est évident. Supposons l'égalité vrai pour $n\ge0$. Trivialement, $H_{n+1}\subset D_{n+1}$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence implique que

$$H_{n+1}=\mathrm{Vect}\left(D_n,\ u_p,\ 2^n\le p\le 2^{n+1}-1\right).$$

Pour tout $k\in\{0,\dots,2^n-1\}$, $\mathbf{1}_{D_{n,k}}=\mathbf{1}_{D_{n+1,2k}}+\mathbf{1}_{D_{n+1,2k+1}}$ et $u_{2^n+k}=\mathbf{1}_{D_{n+1,2k}}-\mathbf{1}_{D_{n+1,2k+1}}$; donc $u_{2^n+k}+\mathbf{1}_{D_{n,k}}=2\,\mathbf{1}_{D_{n+1,2k}}$ et $-u_{2^n+k}+\mathbf{1}_{D_{n,k}}=2\,\mathbf{1}_{D_{n+1,2k+1}}$ ce qui montre l'égalité.

On obtient donc une base orthonormée de $\mathrm{L}^2([0,1])$ en considérant, pour tout entier p, $h_p(t)=u_p(t)/\|u_p\|_2$ soit $h_0(t)=\mathbf{1}_{[0,1[}(t)$ et pour $n\in\mathbb{N}$ et $k=0,\dots,2^n-1$,

$$h_{2^n+k}(t)=\begin{cases}2^{\frac n2}, & \text{si}\quad k\,2^{-n}\le t<(2k+1)\,2^{-(n+1)},\\ -2^{\frac n2}, & \text{si}\quad (2k+1)\,2^{-(n+1)}\le t<(k+1)\,2^{-n},\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

En particulier, pour toutes fonctions f et g de carré intégrable sur $[0,1]$,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \sum_{p\geq 0}\int_0^1 f(x)h_p(x)\,dx \int_0^1 g(x)h_p(x)\,dx, \tag{1}$$

cette dernière série étant absolument convergente.

3. Construction du mouvement brownien.

Construisons d'abord un mouvement brownien sur $[0,1]$. Intégrons les fonctions de la base de Haar pour obtenir la base de Schauder de l'espace de Cameron–Martin

$$\psi_p(t) = \int_0^t h_p(x)\,dx = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}(x)h_p(x)\,dx, \qquad t\in[0,1], \quad p\in\mathbb{N}.$$

Le graphe de la fonction ψ_{2^n+k} est le triangle de base $[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]$ et de hauteur $2^{-\frac{n}{2}-1}$ et $\psi_0(t)=t$.

Soit $(\xi_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi gaussienne centrée réduite. On pose, pour tout $n\geq 0$, tout $t\in[0,1]$ et tout $\omega\in\Omega$,

$$B_t^{(n)}(\omega) = \sum_{0\leq k<2^n}\psi_k(t)\,\xi_k(\omega), \qquad X_t^{(n+1)}(\omega) = B_t^{(n+1)}(\omega) - B_t^{(n)}(\omega),$$

et $X_t^{(0)}(\omega) = B_t^{(0)}(\omega) = t\,\xi_0(\omega)$.

Pour tout $k=0,\ldots,2^n-1$ et tout $t\in[0,1]$, $|\psi_{2^n+k}(t)|\leq 2^{-\frac{n}{2}-1}$ et les fonctions ψ_{2^n+k} ont des « supports » disjoints ; par suite, comme $X_t^{(n+1)} = \sum_{0\leq k<2^n}\psi_{2^n+k}(t)\,\xi_{2^n+k}$,

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|X_t^{(n+1)}\right| = 2^{-\frac{n}{2}-1}\max_{0\leq k<2^n}|\xi_{2^n+k}|.$$

Par indépendance, notant $A_n = \left\{\omega\in\Omega : \max_{0\leq k<2^n}|\xi_{2^n+k}| > \sqrt{2n}\right\}$,

$$\mathbb{P}(A_n) = 1-\mathbb{P}\left(\max_{0\leq k<2^n}|\xi_{2^n+k}|\leq\sqrt{2n}\right) = 1-\left(1-\mathbb{P}(|\xi_0|>\sqrt{2n})\right)^{2^n}.$$

Or $1-(1-a)^n\leq na$ si $0<a<1$; donc

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq k<2^n}|\xi_{2^n+k}|>\sqrt{2n}\right)\leq 2^n\,\mathbb{P}\left(|\xi_0|>\sqrt{2n}\right) = 2^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{2n}}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

D'autre part,

$$\int_{\sqrt{2n}}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq \int_{\sqrt{2n}}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{e^{-n}}{\sqrt{2n}},$$

et par conséquent

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq k<2^n}|\xi_{2^n+k}|>\sqrt{2n}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

Par Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\limsup A_n)=0$. Si $\omega\in\liminf A_n^c$, il existe un entier n_ω tel que, pour tout $n\geq n_\omega$,

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|X_t^{(n+1)}(\omega)\right|\leq\sqrt{n}\,2^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Pour tout $\omega \in \liminf A_n^c$, la série de terme général $X_t^{(n)}(\omega)$ converge donc normalement sur $[0,1]$ ce qui entraîne la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions continues $B_t^{(n)}(\omega)$. On pose alors, pour $\omega \in \liminf A_n^c$,

$$\forall t \in [0,1], \quad B_t(\omega) = t\,\xi_0(\omega) + \sum_{n>0} X_t^{(n)}(\omega) = \lim_{n\to+\infty} B_t^{(n)}(\omega),$$

et pour $\omega \in \limsup A_n$,

$$\forall t \in [0,1], \qquad B_t(\omega) = 0.$$

Vu la convergence uniforme obtenue précédemment, pour tout $\omega \in \Omega$, $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue sur $[0,1]$. Il suffit donc de montrer ($B_0 = 0$) que B est un processus gaussien centré de covariance $s \wedge t$ pour obtenir un mouvement brownien sur $[0,1]$. Remarquons tout d'abord que, d'après la relation (1), pour tous s et t de $[0,1]$,

$$s \wedge t = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(x)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)\,dx = \sum_{p\geq 0} \psi_p(s)\psi_p(t).$$

Les $(\xi_n)_{n\geq 0}$ étant indépendantes, les variables aléatoires $X_t^{(n)} = \sum_{2^{n-1}\leq i<2^n} \psi_i(t)\,\xi_i$, $n \in \mathbb{N}$ le sont également, et ce pour tout $t \in [0,1]$. De plus, elles sont centrées. On a d'autre part,

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[\left(X_t^{(n)}\right)^2\right] = \sum_{n\geq 0} \sum_{2^{n-1}\leq i<2^n} \psi_i(t)^2 = \sum_{p\geq 0} \psi_p(t)^2 = t.$$

D'après le critère de convergence des séries de v.a. indépendantes et centrées, pour tout $t \in [0,1]$, $B_t^{(n)} = \sum_{i\leq n} X_t^{(i)}$ converge vers B_t dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$. Pour tous s et t de $[0,1]$, nous avons par indépendance des ξ_n,

$$\mathbb{E}[B_t B_s] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[B_t^{(n)} B_s^{(n)}\right] = \lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leq p<2^n} \psi_p(t)\psi_p(s) = \sum_{p\geq 0} \psi_p(t)\psi_p(s) = t \wedge s.$$

Il reste à montrer que B est un processus gaussien. $G := \lambda_1 B_{t_1} + \ldots + \lambda_r B_{t_r}$ est la limite dans $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$ lorsque $n \to +\infty$ de

$$G_n := \lambda_1 B_{t_1}^{(n)} + \ldots + \lambda_r B_{t_r}^{(n)} = \sum_{0\leq p<2^n} \left(\lambda_1 \psi_p(t_1) + \ldots + \lambda_r \psi_p(t_r)\right) \xi_p \ ;$$

les v.a. $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant indépendantes, G_n est une v.a.r. gaussienne pour tout n : G est donc une gaussienne.

Pour construire, un mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de considérer une suite $\left(B^{(n)}\right)_{n\geq 1}$ de mouvements browniens indépendants sur $[0,1]$ et de définir

$$B_t = \sum_{1\leq k\leq n}^{n} B_1^{(k)} + B_{t-n}^{(n+1)}, \quad \text{si} \quad n \leq t \leq n+1 \ ;$$

B est un processus gaussien centré de covariance $s \wedge t$ tel que $B_0 = 0$, c'est donc un mouvement brownien.