UFR Mathématiques
Université Rennes I

Maîtrise de Mathématiques/MIM
Année universitaire 03/04

Module PRB1 : Contrôle Continu n° 1.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

1. Exprimer $\mathbb{E}[f(X)]$ sous forme d'une série.

2. Calculer $\mathbb{E}[X^{-1}]$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ c'est à dire de densité $p(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^{-1}$.

Exercice 3. On considère la fonction réelle $u(x) = (1+|x|)^{-1}$.

1. Soit X une variable réelle. On considère, pour $s \geq 0$, $\theta(s) = \mathbb{E}[u(sX)]$.
   Montrer que θ est continue sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Exprimer $\theta'(s)$ comme une espérance. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \theta(s)$.

2. Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $c \in]0,1[$. On considère la variable aléatoire $X = (U-c)^+$. Calculer, pour la variable X, $\theta(s)$ puis $\lim_{s\to+\infty} \theta(s)$. Est-ce cohérent avec la question précédente ?