NOM : **Note :**

Prénom :

Exercice 1. Soit X une v.a.r. de densité $x \longmapsto \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Rayer les propositions qui ne sont pas correctes

- $\mathbb{P}(X \in]0,1[) = 1$;
- $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \in [0,1]$;
- $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \in]0,1[$.

2. Déterminer la loi de $Y = 1/X - [1/X]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.
On rappelle que si $\mathsf{x} \geq 0$ $\sum_{\mathsf{k} \geq 1} \frac{1}{(\mathsf{x}+\mathsf{k})(\mathsf{x}+\mathsf{k}+1)} = \frac{1}{\mathsf{x}+1}$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de densité $x \longmapsto \frac{n^3}{2}\, e^{-n^3|x|}$.

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(|X_n| > n^{-2}\right)$.

2. Calculer $\mathbb{P}\left(\limsup \left\{|X_n| > n^{-2}\right\}\right)$.

3. En déduire que, presque sûrement, $\sum_{k \geq 1} |X_k| < +\infty$.

Exercice 3. 1. Soient X une v.a.r. bornée et $z \in \mathbb{C}$. Justifier brièvement que e^{zX} est intégrable et montrer que

$$\mathbb{E}\left[e^{zX}\right] = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\,\mathbb{E}\left[X^n\right].$$

2. Soient X et Y deux v.a.r. bornées telles que $\mathbb{E}\left[X^n\right] = \mathbb{E}\left[Y^n\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que X et Y ont même loi.