NOM : **Note :**

Prénom :

Exercice 1. Soit X une v.a.r. de densité $x \longmapsto \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Rayer les propositions qui ne sont pas correctes

- $\mathbb{P}(X \in]0,1[) = 1$;
- ~~$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \in [0,1]$;~~
- ~~$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \in]0,1[$.~~

2. Déterminer la loi de $Y = 1/X - [1/X]$ où $[x]$ désigne la partie entière de x.

On rappelle que si $x \geq 0$ $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{1}{x+1}$.

Soit f une fonction borélienne et positive. On a

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(1/X - [1/X]\right)\right] = \int_0^1 f\left(1/x - [1/x]\right) \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x}\, dx \ ;$$

le changement de variables $u = 1/x$ conduit à l'égalité

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \int_1^{+\infty} f\left(u - [u]\right) \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{(1+u)u}\, du = \sum_{k\geq 1} \int_k^{k+1} f\left(u-k\right) \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{(1+u)u}\, du.$$

Or, pour tout $k \geq 1$, via $y = u - k$,

$$\int_k^{k+1} f\left(u-k\right) \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{(1+u)u}\, du = \int_0^1 f(y) \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{(1+y+k)(y+k)}\, dy.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \int_0^1 f(y) \frac{1}{\ln 2} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(1+y+k)(y+k)}\, dy = \int_0^1 f(y) \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+y}\, dy.$$

Y a la même loi que X.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de densité $x \longmapsto \dfrac{n^3}{2}\, e^{-n^3|x|}$.

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(|X_n| > n^{-2}\right)$.

On a, par parité,

$$\mathbb{P}\left(|X_n| > n^{-2}\right) = \int_{|x|>n^{-2}} \frac{n^3}{2}\, e^{-n^3|x|}\, dx = \int_{n^{-2}}^{+\infty} n^3\, e^{-n^3 x}\, dx = \left[-e^{-n^3 x}\right]_{n^{-2}}^{+\infty}.$$

Donc $\mathbb{P}\left(|X_n| > n^{-2}\right) = e^{-n}$.

2. Calculer $\mathbb{P}\left(\limsup \left\{|X_n| > n^{-2}\right\}\right)$.

Puisque $e > 1$, $\sum_{n\geq 1} e^{-n} < +\infty$ et le lemme de Borel-Cantelli implique que

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{|X_n| > n^{-2}\right\}\right) = 0.$$

3. En déduire que, presque sûrement, $\displaystyle\sum_{k\geq 1} |X_k| < +\infty$.

On a

$$\left(\limsup \left\{|X_n| > n^{-2}\right\}\right)^c = \liminf \left\{|X_n| \leq n^{-2}\right\} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \left\{|X_k| \leq k^{-2}\right\}.$$

Si donc $\omega \in \left(\limsup \left\{|X_n| > n^{-2}\right\}\right)^c$, il existe un entier n_ω tel que, pour tout $k \geq n_\omega$, $|X_k(\omega)| \leq k^{-2}$. Par conséquent, $\sum_{k\geq 1} |X_k(\omega)| < +\infty$.

Ceci montre que $\sum_{k\geq 1} |X_k| < +\infty$ presque sûrement puisque, d'après la question précédente, $\mathbb{P}\left(\limsup \left\{|X_n| > n^{-2}\right\}\right) = 0$.

Exercice 3. 1. Soient X une v.a.r. bornée et $z \in \mathbb{C}$. Justifier brièvement que e^{zX} est intégrable et montrer que

$$\mathbb{E}\left[e^{zX}\right] = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \mathbb{E}\left[X^n\right].$$

X étant bornée – disons par $a > 0$ –, e^{zX} est également bornée (par $e^{|z|a}$) donc intégrable.

D'autre part, puisque

$$\mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{n \geq 0} \left|\frac{z^n X^n}{n!}\right|\right] = \mathbb{E}\left[e^{|z||X|}\right] \leq e^{|z|a} < +\infty,$$

on a l'égalité dans $\mathbb{C}$

$$\mathbb{E}\left[e^{zX}\right] = \mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{n \geq 0} \frac{z^n X^n}{n!}\right] = \sum\nolimits_{n \geq 0} \mathbb{E}\left[\frac{z^n X^n}{n!}\right] = \sum\nolimits_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \mathbb{E}\left[X^n\right].$$

2. Soient X et Y deux v.a.r. bornées telles que $\mathbb{E}\left[X^n\right] = \mathbb{E}\left[Y^n\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X et Y ont même loi.

D'après la question précédente, si X et Y sont bornées, on a, pour tout réel t,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}\left[X^n\right], \quad \varphi_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}\left[Y^n\right].$$

Par suite, si $\mathbb{E}\left[X^n\right] = \mathbb{E}\left[Y^n\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y ont même fonction caractéristique et donc même loi puisque la fonction caractéristique caractérise la loi.