NOM : **Note :**

Prénom :

Exercice 1. Préciser si les affirmations suivantes sont exactes ou pas ; donner une démonstration si le résultat est correct, un contre-exemple dans le cas contraire.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives telle que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\{X_n \geq n\}\right) < +\infty.$$

1. Presque sûrement, on a :

   a. $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} \leq 1$ b. $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} < 1$ c. $\sup_{n\geq 1} \frac{X_n}{n} \leq 1$.

2. Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont identiquement distribuées alors X_1 est intégrable

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles ; pour tout $n \geq 1$, X_n a pour densité $x \longmapsto n\,e^{-nx}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi donnée par : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = k) = p\,(1-p)^{k-1}$ où $p \in]0,1[$. On supose que pour tout $n \geq 1$, N et X_n sont indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y en posant :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.