**NOM :** **Note :**

**Prénom :**

---

**Exercice 1.** Préciser si les affirmations suivantes sont exactes ou pas ; donner une démonstration si le résultat est correct, un contre-exemple dans le cas contraire.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives telle que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\{X_n \geq n\}\right) < +\infty.$$

1. Presque sûrement, on a :

   a. $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} \leq 1$ b. $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} < 1$ c. $\sup_{n\geq 1} \frac{X_n}{n} \leq 1$.

2. Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont identiquement distribuées alors $X_1$ est intégrable

---

**Exercice 1. 1. (a)** D'après le lemme de Borel-Cantelli $\mathbb{P}\left(\limsup \left\{X_n \geq n\right\}\right) = 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}\left(\liminf \left\{X_n < n\right\}\right) = 1$. Si $\omega \in \liminf \left\{X_n < n\right\} = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} \left\{X_k < k\right\}$, il existe $n_\omega$ tel que, pour tout $k \geq n_\omega$, $\omega \in \{X_k < k\}$ : $\forall k \geq n_\omega$, $\frac{X_k(\omega)}{k} < 1$ et donc $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} \leq 1$.
Cette assertion est donc vraie.

**(b)** Prenons des variables aléatoires constantes : pour $n = 1$, $X_n = 2$ et pour $n \geq 2$, $X_n = n - 1$. On a, pour $n \geq 2$, $\mathbb{P}(\{X_n \geq n\}) = 0$ de sorte que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\{X_n \geq n\}) = \mathbb{P}(X_1 \geq 1) = 1$. D'autre part, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n} = 1.$$

C'est faux !

**(c)** C'est encore faux puisqu'avec le même contre-exemple pour tout $\omega \in \Omega$, $\sup_{n\geq 1} \frac{X_n}{n} = 2$.

**2.** C'est vrai ! En effet, si les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont identiquement distribuées, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(\{X_n \geq n\}) = \mathbb{P}(\{X_1 \geq n\})$. Par conséquent, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\{X_1 \geq n\}) < +\infty$. Comme nous l'avons vu en cours, cette condition est équivalente à l'intégrabilité de $X_1$ qui est positive.

**Exercice 2.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles ; pour tout $n \geq 1$, $X_n$ a pour densité $x \longmapsto n\, e^{-nx}\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi donnée par : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = k) = p\,(1-p)^{k-1}$ où $p \in ]0,1[$. On supose que pour tout $n \geq 1$, N et $X_n$ sont indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y en posant :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

---

**Exercice 2.** Soit $f$ une fonction borélienne et positive. Nous avons, puisque $1 = \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{N=k\}}$,

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_N)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{N=k\}} f(X_N)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{N=k\}} f(X_k)\right].$$

Pour tout $k \geq 1$, $\mathbf{1}_{\{N=k\}} f(X_k) \geq 0$, ce qui permet d'obtenir par convergence monotone

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N=k\}} f(X_k)\right] \ ;$$

pour tout entier $k$, les variables N et $X_k$ sont indépendantes, et puisque tout est positif,

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N=k\}}\right] \mathbb{E}\left[f(X_k)\right] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left(\{N = k\}\right) \mathbb{E}\left[f(X_k)\right].$$

Par conséquent, toujours par convergence monotone,

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} \int_0^{+\infty} f(x)\, k e^{-kx}\, dx = \int_0^{+\infty} f(x) \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} k e^{-kx}\, dx.$$

Rappelons que, pour tout $|z| < 1$,

$$S(z) = \sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}, \qquad S'(z) = \sum_{k\geq 1} k z^{k-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Par suite,

$$\mathbb{E}\left[f(Y)\right] = \int_0^{+\infty} f(x)\, \frac{pe^{-x}}{\left(1-(1-p)e^{-x}\right)^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \frac{pe^{-x}}{\left(1-(1-p)e^{-x}\right)^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, dx.$$

Y a pour densité $x \longmapsto \frac{pe^{-x}}{(1-(1-p)e^{-x})^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Dans cet exemple, il est plus rapide de calculer la fonction de répartition. En effet si $t \geq 0$,

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\left(\{Y \leq t\}\right) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\left(\{Y \leq t\} \cap \{N = k\}\right) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_k \leq t,\ N = k),$$

et par indépendance de $X_k$ et N,

$$F_Y(t) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_k \leq t)\, \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k\geq 1} F_{X_k}(t)\, p(1-p)^{k-1}.$$

Un calcul élémentaire donne

$$F_Y(t) = \sum_{k\geq 1} \left(1 - e^{-kt}\right) p(1-p)^{k-1} = 1 - \frac{pe^{-t}}{1-(1-p)e^{-t}}.$$

Bien évidemment, si $t < 0$, $F_Y(t) = 0$.

---