UFR Mathématiques
Université Rennes I

Master 1re année
Année 2006/2007

# G12 : Contrôle continu n° 1.

**Exercice 1** (4 points)**.** Soit $X$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ ; $X$ a pour densité $x \longmapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Déterminer la loi de $Y = -\ln(1-X)$.

**Exercice 2** (4 points)**.** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose

$$\forall \lambda \geq 0, \qquad \psi(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X}\right].$$

1. Calculer $\psi$ lorsque $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$ : $\mathbb{P}(X=1) = p$, $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

2. Montrer, dans le cas général, que $\psi$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et calculer $\lim_{\lambda \to +\infty} \psi(\lambda)$.

**Exercice 3** (7 points)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ ; on rappelle que $X_1$ a pour fonction caractéristique $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

En déduire la loi de $Y_n$.

2. Soit $N$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$. On définit $Y$ en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N(\omega)}} \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

Déterminer la fonction caractéristique de $Y$ ainsi que sa loi.

**Exercice 4** (5 points)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles ; pour tout $n \geq 1$, $X_n$ a pour densité $p_n(x) = \frac{n^2}{2} e^{-n^2|x|}$.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\left\{|X_n| > n^{-\frac{3}{2}}\right\}\right)$.

2. Déterminer $\mathbb{P}\left(\limsup \left\{|X_n| > n^{-\frac{3}{2}}\right\}\right)$.

3. En déduire que, presque sûrement, la série $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge absolument.



**Fin de l'épreuve**