G12 : Correction rapide du CC1.

Exercice 1. Soit f une fonction borélienne et positive. Puisque X a pour densité $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, on a

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[f(-\ln(1-X))] = \int_{]0,1[} f(-\ln(1-x))\,dx,$$

et le changement de variable $y = -\ln(1-x)$ donne

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \int_{]0,+\infty[} f(y)\,e^{-y}dy.$$

Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 2. 1. Si X suit la loi $\mathcal{B}(p)$ alors, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\psi(\lambda) = e^{-\lambda\times 0}\,\mathbb{P}(\{X=0\}) + e^{-\lambda\times 1}\,\mathbb{P}(\{X=1\}) = (1-p) + pe^{-\lambda}.$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\lambda \longmapsto e^{-\lambda X(\omega)}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et $\lim_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda X(\omega)}$ vaut 0 si $X(\omega) \neq 0$ et 1 dans le cas contraire. Puisque X est une v.a. positive on a

$$\sup_{\lambda\geq 0}\left|e^{-\lambda X}\right| \leq 1,$$

et la variable aléatoire constante égale à 1 est intégrable sur notre espace de probabilité.

Les résultats sur les intégrales à paramètre donnent la continuité de ψ sur $\mathbf{R}_+$ et

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \psi(\lambda) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{X=0\}}\right] = \mathbb{P}(\{X=0\}).$$

(On retrouve bien le $1-p$ de la première question.)

Exercice 3. 1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Vu l'indépendance des $(X_n)_{n\geq 1}$, on a, pour tout réel t,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(itn^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^n X_k\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{itX_k/\sqrt{n}}\right] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{itX_k/\sqrt{n}}\right] = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}\left(t/\sqrt{n}\right),$$

et puisque ces variables sont identiquement distribuées

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_1}\left(t/\sqrt{n}\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t/\sqrt{n}\right)^2\right)^n = \exp\left(-\frac{1}{2}n\left(t/\sqrt{n}\right)^2\right) = \exp(-t^2/2)\ ;$$

Y_n suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ puisque la fonction caractéristique détermine la loi.

2. Puisque N est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, pour tout réel t,

$$e^{itY} = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{N=n\}} e^{itY} = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{N=n\}} e^{itY_n}$$

de sorte que $\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{N=n\}} e^{itY_n}\right]$. Pour justifier la permutation de l'espérance et de la somme, remarquons que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\left|\mathbf{1}_{\{N=n\}} e^{itY_n}\right|\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N=n\}}\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\{N=n\}) = 1 < +\infty.$$

Par conséquent,

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{N=n\}} e^{itY_n}\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{N=n\}} e^{itY_n}\right].$$

Comme les variables N et $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, il en va de même des variables N et $(Y_n)_{n\geq 1}$ et donc

$$\varphi_Y(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\{N=n\}) \mathbb{E}\left[e^{itY_n}\right] = e^{-t^2/2} \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\{N=n\}) = e^{-t^2/2}$$

puisque les $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Y suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (quelque soit la loi de N !)

Exercice 4. 1. On a, par parité de p_n

$$\mathbb{P}\left(\left\{|X_n| > n^{-\frac{3}{2}}\right\}\right) = \int_{|u|>n^{-\frac{3}{2}}} p_n(u)du = \int_{u>n^{-\frac{3}{2}}} n^2 e^{-n^2 u} du = e^{-\sqrt{n}}.$$

2. Puisque $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}} < +\infty$, le lemme de Borel–Cantelli donne $\mathbb{P}\left(\limsup\left\{|X_n| > n^{-\frac{3}{2}}\right\}\right) = 0$.

3. Notons N l'événement $\limsup\left\{|X_n| > n^{-\frac{3}{2}}\right\}$; $N^c = \liminf\left\{|X_n| \leq n^{-\frac{3}{2}}\right\}$. Soit $\omega \in N^c$. Il existe un entier n_ω tel que, pour tout $n \geq n_\omega$, $\omega \in \left\{|X_n| \leq n^{-\frac{3}{2}}\right\}$ soit $|X_n(\omega)| \leq n^{-\frac{3}{2}}$ pour tout $n \geq n_\omega$. Il résulte du critère de Riemann ($3/2 > 1$!), que la série $\sum_{n\geq 1} X_n(\omega)$ est absolument convergente pour tout $\omega \in N^c$.