UFR MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ RENNES I

Master 1re année
Année 2005/2006

G12 : Contrôle continu n° 2.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées ; X_1 a pour densité $\frac{1}{2x^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)$.

On note, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \sup_{1\leq k\leq n} X_k$.

1. (a) Montrer que $A = \{\sup_{n\geq 1} X_n = +\infty\}$ est un événement asymptotique de $(X_n)_{n\geq 1}$.

(b) Quelles valeurs peut prendre $\mathbb{P}(A)$?

2. (a) Déterminer la fonction de répartition de X_1 puis, pour tout $n \geq 1$, celle de M_n.

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\limsup\{M_n < r\} = \cap_{n\geq 1}\{M_n < r\}$ et en déduire que

$$\mathbb{P}\left(\limsup\{M_n < r\}\right) = 0.$$

(c) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\liminf_{n\to+\infty} M_n \geq r$ presque sûrement ; en déduire que $\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty$ presque sûrement.

(d) Que vaut $\mathbb{P}(A)$?

3. Montrer que la suite $(M_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la fonction de répartition.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives de carré intégrable. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] = +\infty$ et que la suite $\left(\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\mathbb{E}[X_n]}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 1 dans L^2.

2. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$ c'est à dire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda_n}\frac{\lambda_n^k}{k!},$$

et que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n} < +\infty$.

(a) La suite $\left(\frac{X_n}{\lambda_n}\right)_{n\geq 1}$ converge-t-elle vers 1 dans L^2 ?

(b) Montrer que $\left(\frac{X_n}{\lambda_n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 1 presque sûrement.