G12 : Correction rapide du CC 2.

Exercice 1. 1. (a) Puisque les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont réelles, on a, pour tout $p\geq 1$, $A=\{\sup_{n\geq p} X_n\}$ et donc $A\in\sigma(X_n : n\geq p)$. A est un événement asymptotique de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

(b) Comme les variables sont indépendantes, $\mathbb{P}(A)=0$ ou $\mathbb{P}(A)=1$ d'après la loi du 0–1..

2. (a) Notons F la fonction de répartition de X_1. Un calcul élémentaire donne

$$F(t)=\frac{1}{2|t|}\quad \text{si } t<-1,\qquad F(t)=\frac{1}{2}\quad \text{si } -1\leq t<1,\qquad F(t)=1-\frac{1}{2t}\quad \text{si } t\geq 1.$$

Puisque les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d., on a, pour tous $n\geq 1$ et $t\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(M_n\leq t)=\mathbb{P}(X_1\leq t,\dots,X_n\leq t)=\mathbb{P}(X_1\leq t)^n.$$

(b) La suite $(M_n)_{n\geq 1}$ étant croissante, les événements $\{M_n<r\}$ sont décroissants. Par suite, pour tout $n\geq 1$, $\cup_{k\geq n}\{M_k<r\}=\{M_n<r\}$ et $\limsup\{M_n<r\}=\cap_{n\geq 1}\{M_n<r\}$. Toujours par décroissance, comme F est continue,

$$\mathbb{P}\left(\limsup\{M_n<r\}\right)=\mathbb{P}\left(\cap_{n\geq 1}\{M_n<r\}\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(M_n<r)=\lim_{n\to+\infty}F(r)^n.$$

Comme, pour tout $r\geq 1$, $F(r)<1$, $F(r)^n\longrightarrow 0$.

(c) Soit $r\geq 1$. On a $\mathbb{P}(\liminf\{M_n\geq r\})=1$; si $\omega\in\liminf\{M_n\geq r\}$, il existe un entier n_ω tel que, pour tout $k\geq n_\omega$, $M_k(\omega)\geq r$ et donc $\liminf_{n\to+\infty} M_n(\omega)\geq r$. D'où $\liminf_{n\to+\infty} M_n\geq r$ p.s.

De plus ($\mathbb{N}^*$ est dénombrable), $\mathbb{P}\left(\cap_{r\in\mathbb{N}^*}\liminf\{M_n\geq r\}\right)=1$ et si $\omega\in\cap_{r\in\mathbb{N}^*}\liminf\{M_n\geq r\}$, pour tout $r\geq 1$, $\liminf_{n\to+\infty} M_n(\omega)\geq r$ soit $\liminf_{n\to+\infty} M_n(\omega)=+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} M_n(\omega)=+\infty$. D'où p.s. $\lim_{n\to+\infty} M_n=+\infty$.

(d) On a $\sup_{n\geq 1} X_n=\lim_{n\to+\infty} M_n$ et donc $\mathbb{P}(A)=1$.

3. On a, notant F_n la fonction de répartition de M_n/n, $F_n(t)=F(nt)^n$. Si $t\leq 0$, $F_n(t)\leq F_n(0)=2^{-n}\longrightarrow 0$. Si $t>0$, il existe un entier r tel $rt\geq 1$ et pour tout $n\geq r$, $F_n(t)=\left(1-\frac{1}{2nt}\right)^n\longrightarrow\exp\left(-\frac{1}{2t}\right)$.

Soit Z de fonction de répartition $G(t)=\exp\left(-\frac{1}{2t}\right)\mathbf{1}_{t>0}$; $(M_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Z puisque $(F_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers G.

Exercice 2. 1. Puisque $\mathbb{E}[X_n]\longrightarrow+\infty$, $\mathbb{E}[X_n]>0$ pour n assez grand. On a

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{X_n}{\mathbb{E}[X_n]}-1\right|^2\right]=\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\mathbb{E}[X_n]^2}$$

qui tend vers 0 puisque $\mathbb{V}(X_n)/\mathbb{E}[X_n]$ est bornée et $\mathbb{E}[X_n]\longrightarrow+\infty$.

2. (a) On a $\mathbb{E}[X_n]=\mathbb{V}(X_n)=\lambda_n$. La suite $E[X_n]/\mathbb{V}(X_n)$ est constante. De plus, $\lambda_n\longrightarrow+\infty$ car $1/\lambda_n\longrightarrow 0$ comme $\sum 1/\lambda_n$ converge. La question précédente donne le résultat.

(b) Soit $\varepsilon>0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{\lambda_n}-1\right|>\varepsilon\right)\leq\varepsilon^{-2}\mathbb{E}\left[\left|\frac{X_n}{\lambda_n}-1\right|^2\right]=\varepsilon^{-2}\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\lambda_n^2}=\frac{1}{\varepsilon^2\lambda_n}.$$

Comme $\sum 1/\lambda_n<+\infty$, le lemme de Borel-Cantelli donne $\mathbb{P}\left(\limsup\left\{\left|\frac{X_n}{\lambda_n}-1\right|>\varepsilon\right\}\right)=0$; la suite $(X_n/\lambda_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 1.