G12 : Contrôle continu n° 2.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives ; pour tout $n \geq 1$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$: X_n a pour densité $x \longmapsto \lambda_n e^{-\lambda_n x}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 :
   (a) en probabilité ;
   (b) dans L^1.
2. On suppose les $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes. Donner un exemple dans lequel $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 dans L^1 mais pas presque sûrement.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.

Montrer que la suite $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0 si et seulement si X_1 est intégrable.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0,1]$, indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1]$; X_1 a pour fonction de répartition F où $F(t) = 0$ si $t < 0$, $F(t) = \min(t,1)$ si $t \geq 0$.

On note, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$.

1. Déterminer, pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition, F_n, de M_n.
2. (a) Calculer, pour tout $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|1 - M_n| > \varepsilon)$.
   (b) En déduire que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 1.
3. Montrer que la suite $(n(M_n - 1))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z de fonction de répartition G définie par $G(t) = e^t$ si $t \leq 0$, $G(t) = 1$ pour $t > 0$.

Fin de l'épreuve