UFR Mathématiques — Université Rennes 1

Master 1re année — Année 2004/2005

Module G12 : **Contrôle continu n° 3.**

Exercice 1. *Question de cours.* Énoncer la loi forte des grands nombres ainsi que le théorème limite central.

Exercice 2. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. positives indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1]$; U_1 a pour densité $x \longmapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

1. Vérifier rapidement que $\mathbb{E}[U_1] = 1/2$, $\mathbb{V}(U_1) = 1/12$.

2. *On rappelle à nouveau que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-1/2} \sum_{k=1}^n k^{-1/2} = 2$.

(a) Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \left(U_n - \mathbb{E}[U_n]\right)$$

converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$.

(b) En déduire, en utilisant le lemme de Kronecker, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{\sqrt{k}} = 1, \quad \text{presque sûrement.}$$

Exercice 3. Soient $c > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre c. *On rappelle que* $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{V}(X_1) = c$. On note, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que $\left(\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $\sqrt{c}$.

2. **(a)** Montrer que la suite de terme général

$$\left(\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - c\right), \frac{S_n}{n}\right)$$

converge en loi vers (G, c) où G suit la loi $\mathcal{N}(0, c)$.

(b) En déduire, en écrivant

$$\sqrt{S_n} - \sqrt{nc} = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - c\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{S_n}{n}} + \sqrt{c}},$$

que la suite $\left(\sqrt{S_n} - \sqrt{nc}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{4})$.