Module G12 : Correction du contrôle continu n° 3

Exercice 1. Voir cours.

Exercice 2. **1.** Nous avons

$$\mathbb{E}[U_1] = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}\left[U_1^2\right] = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

de sorte que $\mathbb{V}(U_1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

2. **(a)** Les variables aléatoires $\left(\frac{1}{n}(U_n - \mathbb{E}[U_n])\right)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, de carré intégrable et centrées. De plus,

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}(U_n - \mathbb{E}[U_n])\right) = \frac{1}{12}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

D'après le théorème sur les *séries centrées*, $\sum_{n\geq 1} n^{-1}(U_n - \mathbb{E}[U_n])$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une v.a. réelle de carré intégrable.

(b) D'après la question précédente et le lemme de Kronecker, presque sûrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}(U_k - \mathbb{E}[U_k]) = 0,$$

et d'autre part

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\mathbb{E}[U_k] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1.$$

Le résultat s'en suit.

Exercice 3. **1.** D'après la loi forte des grands nombres – la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est i.i.d. et X_1 est intégrable – presque sûrement $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1] = c$. Puisque $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue au point c, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{S_n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{c}$ presque sûrement.

2. **(a)** La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est i.i.d. et X_1 est de carré intégrable : le théorème limite central implique que

$$T_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - c\right)$$

converge en loi vers une v.a.r. G de loi $\mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X_1) = c)$. Comme $M_n = \frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement et donc en probabilité vers c, le lemme de Slutsky entraîne la convergence en loi vers (G, c) du couple (T_n, M_n).

(b) Avec les notations précédentes, comme M_n est positive, $\sqrt{S_n} - \sqrt{nc} = f(T_n, M_n)$ avec $f(x, y) = x/(\sqrt{|y|} + \sqrt{c})$. Or f est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\sqrt{S_n} - \sqrt{nc} = f(T_n, M_n)$ converge en loi vers $f(G, c) = G/(2\sqrt{c})$ qui suit la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{4})$.